

# MEDICIÓN DE DISTANCIA A LA LUNA CON TELESCOPIO Y CÁMARA DIGITAL EN UNA NOCHE

*Néstor A. Olivieri*<sup>1</sup>  
*Eduardo E. Rodríguez*<sup>2</sup>

**Resumen:** En la introducción del concepto de medición en cursos de física y astronomía básicos, las mediciones astronómicas suelen reducirse a ejemplos de orden de magnitud. Por otro lado, son habituales los enfoques descriptivos, que no ponen en contacto a los alumnos con instrumentos o con los objetos de estudio. Por el contrario, este trabajo muestra cómo se pueden usar un telescopio de aficionados y una cámara digital estándar para tomar imágenes de la Luna y a partir de ellas obtener la distancia al satélite. La técnica se basa en un sencillo análisis de correlación de dos imágenes tomadas desde un mismo lugar con intervalo de algunas horas. La pequeña variación del tamaño angular de la Luna debido al hecho de que la distancia Luna-observador varía al rotar la Tierra se puede poner en evidencia y sirve para obtener los datos básicos para deducir la distancia al satélite.

**Palabras clave:** distancia a la Luna; fotografía digital; análisis de correlación.

## MEDIDA DE DISTÂNCIA À LUA COM TELESCÓPIO E CÂMERA DIGITAL EM UMA NOITE

**Resumo:** Na introdução do conceito de medida em cursos de física e astronomia básicos, as medidas astronômicas costumam reduzir-se a exemplos de ordem de magnitude. Por outro lado, são habituais abordagens descritivas que não colocam os alunos em contato com instrumentos ou com os objetos de estudo. Pelo contrário, este trabalho mostra como pode ser usado um telescópio amador e uma câmera digital padrão para obter imagens da Lua, e a partir delas calcular a distância ao satélite. A técnica baseia-se em uma simples análise da correlação entre duas imagens captadas desde um mesmo local com intervalo de algumas horas. A pequena variação do tamanho angular da Lua devida ao fato de que a distância Lua-observador varia com a rotação da Terra pode-se pôr em evidência e serve para obter os dados básicos para deduzir a distância ao satélite.

**Palavras-chave:** distância à Lua; fotografia digital; análise de correlação.

## MEASURING THE DISTANCE TO THE MOON WITH A TELESCOPE AND A DIGITAL CAMERA IN ONE- NIGHT OBSERVATION

**Abstract:** When the concept of measurement is introduced in basic physics and astronomy courses, astronomical measurements are often reduced to examples of order-of-magnitude. On the other hand, there are descriptive approaches that do not put in contact the students with the instruments or with the objects of study. On the contrary, this work shows how an amateur telescope and a standard digital camera can be used to take images of the Moon, and obtain the distance to the satellite from them. The technique is based on a simple correlation analysis between two images taken from the same place with interval of some hours. The small variation in the angular size of the Moon due to the fact that the Moon-observer distance varies when the Earth rotates can be put in evidence, and serves to obtain the basic data to deduce the distance to the satellite.

**Keywords:** Moon distance; digital photography; correlation analysis.

---

<sup>1</sup> Instituto de Industria, Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), Argentina.  
E-mail: <nolivier@ungs.edu.ar>.

<sup>2</sup> Instituto de Industria, Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), Argentina.  
E-mail: <erodrigu@ungs.edu.ar>.

## 1 Introdução

La observación de la Luna ha fascinado a la humanidad desde siempre y este interés ha incluido tanto al hombre común como a científicos. Apenas nacida la era espacial, este interés se manifestó en una exitosa carrera por alcanzarla, un hecho que sin duda puede reeditarse pronto con nuevos actores. Sin embargo, persisten cuestiones que despiertan el interés en cursos básicos de física o astronomía: fases, tamaño, distancia o su curiosa topografía. La literatura educativa se ha hecho eco de algunas de estas cuestiones para ofrecer algunas respuestas (DERMAN, 2000; PELLIZA et al, 2014).

Este artículo presenta un método para medir la distancia Tierra-Luna. La propuesta contribuye a afianzar el concepto de medición en los primeros cursos de física en el campo astronómico que es muy poco abordado con experiencias metrológicas. Muchas veces el alumnado se ve limitado al contacto con datos de tablas de distancias sin tener idea de los procedimientos que se han usado para calcularlas.

El método usado requiere de dos fotografías de la Luna tomadas desde una misma localidad pero con unas horas de diferencia. La rotación terrestre produce que la distancia entre el observador y la Luna cambie varios miles de kilómetros durante ese lapso. Esto tiene como consecuencia esperable un cambio en el tamaño angular que se aprecia en las imágenes fotográficas. Este hecho, adecuadamente analizado mediante el estudio de las imágenes, permite efectuar una triangulación que posibilita la determinación de la distancia. El método ha sido usado en dos épocas diferentes del año, bajo condiciones orbitales y de observación también distintas.

Lo descrito en el párrafo anterior es conceptualmente sencillo pero para los estudiantes puede ser la oportunidad de experiencias nuevas y enriquecedoras. Para muchos de ellos un telescopio o la formación de imágenes en una cámara no son más que esquemas de lentes y marcha de rayos en alguna pizarra de una clase de óptica. Se les da aquí la oportunidad de entrar en contacto directo con estos instrumentos y manejarlos: dirigir el telescopio al astro, realizar el enfoque, regular sensibilidad y tiempo de exposición de la cámara para conseguir imágenes claras que luego examinarán con detalle, etc. Por otro lado, deberán integrar todo esto con algunas cuestiones básicas de movimiento de cuerpos celestes y a la vez con una geometría no abstracta que tiene un propósito experimental bien definido, como es la triangulación a la cual nos referimos inmediatamente.

Se trata pues de un importante procedimiento para determinar distancias astronómicas. Esta técnica permite hallar la posición de un astro situado en el vértice de un triángulo del cual se conocen las medidas de dos ángulos y un lado (la línea de base). En la variante que se describe en este trabajo, se necesita conocer un ángulo, la longitud de la línea de base y la razón entre los lados restantes de triángulo.

Existen métodos de triangulación que utilizan el paralaje y que pueden incluso tomar el fondo estelar como referencia. Con ellos se ha estimado la distancia a la Luna (LOUGH et al, 2006; CENADELLI et al, 2009; PAOLANTONIO; PINTADO, 2006). Estos métodos requieren de dos observadores coordinados y situados a miles de kilómetros entre sí con el objeto de contar con una gran línea de base. Por el contrario, la propuesta aquí desarrollada no requiere de la coordinación de observadores lejanos y puede ser llevada a cabo por un solo observador con telescopio y cámara fotográfica.

Otro método que efectúa la medición desde un único lugar utiliza posiciones angulares de la Luna medidas con un sextante a diferentes horas (CELNIKIER, 1983). Sin embargo, aquí no se ofrecen datos experimentales que permitan ponderar la precisión de esta técnica. Nuestro método prescinde de la medición de ángulos y usa, en cambio, el conteo de píxeles en imágenes digitales usando software de fácil acceso.

Otras propuestas requieren de fotografías para ubicar la Luna en el fondo estelar (CENADELLI et al., 2009; PAOLANTONIO; PINTADO, 2006); para medir parámetros de su órbita (SARTON, 1980); para deducir su velocidad orbital alrededor de la Tierra (HUGHES, 2006); y, recientemente, para estimar su distancia (PELLIZA, 2014) basándose en la ubicación del centro y bordes de las imágenes. En nuestro caso, la obtención de imágenes claras y detalladas de la accidentada superficie lunar es esencial para llevar a cabo un análisis de correlación que mejora la exactitud de la medición y permite estimar su incertidumbre. Por otro lado, el análisis queda complementado con consideraciones sobre los posibles efectos de la refracción atmosférica y la libración lunar. Además, el método se abstrae de condiciones especiales de observación (movimiento radial y declinación constante) de nuestra propuesta preliminar (OLIVIERI; RODRÍGUEZ, 2010) de manera que aumenta el número de días en los cuales la experiencia es realizable.

## 2 Equipos y observaciones

Hemos usado un telescopio reflector newtoniano de 200 mm de apertura y 1000 mm de distancia focal. La cámara utilizada es una réflex Canon 350D de 8 Mpx de resolución. El conjunto permite distinguir detalles en la superficie lunar, que son necesarios para llevar a cabo la medición. Las fotografías fueron obtenidas a foco primario de manera que la imagen producida por el espejo principal se forma directamente sobre el sensor de la cámara. Dado que la Luna es un objeto muy brillante que fácilmente puede saturar una imagen fotográfica, se realizaron dos ajustes: reducción del tiempo de exposición a 1/500 segundos y baja de la sensibilidad a ISO 100.

Las imágenes que se utilizaron fueron tomadas desde la localidad de José C. Paz, localidad situada 30 km al NE de la ciudad de Buenos Aires. Las coordenadas del sitio son: latitud 34° 30' sur y longitud 58° 45' oeste (GOOGLE EARTH).

En cada noche se tomaron un par de fotografías separadas por un intervalo de unas cinco horas. Una de estas imágenes es siempre la correspondiente al pasaje de la Luna por el meridiano local, ya que en esta posición se minimiza la distancia al observador y el satélite se observa con un mayor tamaño angular, a la vez que se simplifica la geometría del problema.

Las figuras 1a y 1b muestran las imágenes obtenidas días después del plenilunio el 10 y 11 de febrero de 2012. La primera fotografía de la hora 22:54 captó a la Luna sobre el meridiano (Luna cercana) a una altura de 62° sobre el horizonte. La segunda imagen corresponde a la hora 03:49 con la Luna descendiendo (Luna lejana) a una altura de 18° sobre el horizonte.

Durante la segunda observación, dada en luna llena los días 6 y 7 de abril de 2012, la primera imagen se obtuvo a la hora 20:05 con una Luna ascendiendo a unos 19° (figura 1c) en tanto que la imagen correspondiente a la posición meridiana se sacó a la 01:12 a una altura de 67° (Figura 1d).



**Figura 1** - a) y b) imágenes de la Luna obtenidas durante la noche del 10 y 11 de febrero de 2012; c) y d) imágenes obtenidas en la noche del 6 y 7 de abril de 2012.

**Fuente:** Fotografías de los autores.

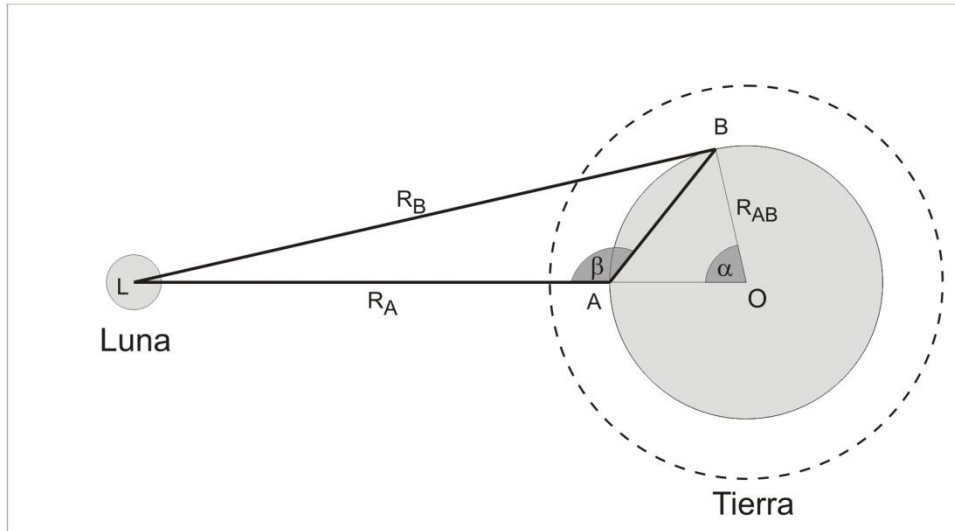
En un análisis preliminar se advierte una variación del diámetro de la imagen entre dos fotografías consecutivas, que alcanza entre los 20 y 25 píxeles sobre un total de unos 1500. Esta diferencia se debe al cambio de tamaño angular del satélite debido a la variación de la distancia al observador, como consecuencia de la rotación de la Tierra.

### 3 Método

La figura 2 muestra la geometría asociada al método en una vista desde el polo sur. Se trata de resolver el triángulo cuyos vértices son la Luna, el punto A y el punto B. La rotación terrestre lleva al observador desde A hasta B en el intervalo aproximado entre fotografías, unas 5 horas. El punto señalado como O es el centro del paralelo terrestre que contiene los puntos de observación A y B, y el círculo determinado por tal paralelo se halla representado en color gris. El círculo exterior marcado en línea punteada indica el ecuador terrestre.

Debemos señalar que los triángulos ABO y ABL en general no son coplanares, como parecen serlo en la figura. Es útil hacer notar que ambos triángulos comparten el lado AB. Un desplazamiento de ABL fuera del plano que contiene a ABO puede pensarse como una rotación de unos grados del citado ABL en torno al lado común AB. Esta rotación no modifica al propio AB, tampoco al ángulo  $\beta$  ni a la relación entre los lados  $R_A$  y  $R_B$ , por lo que es válido aplicar en este caso una formulación sencilla basada en la figura 2.

La Luna no está estática y sigue una órbita elíptica. Además, sus variaciones de declinación hacen que los puntos extremos de  $R_A$  y  $R_B$  no siempre coincidan exactamente en L. Realizaremos una aproximación de órbita circular dejando en claro las condiciones bajo las cuales dicha aproximación es procedente y permite salvar las dificultades señaladas.



**Figura 2** - Observación de la Luna por el observador que pasa desde la posición A hasta la posición B debido a la rotación terrestre. Desde ambos puntos se fotografía la Luna, que cambia su tamaño angular por la variación de distancia entre  $R_A$  y  $R_B$ . Los ángulos  $\beta$  y  $\alpha$  y la cuerda AB dependen del giro de la Tierra y completan los datos necesarios para resolver el triángulo ALB.

**Fuente:** Gráfico de los autores.

La esencia del método es una triangulación que se hace posible gracias a un análisis de la información de las imágenes obtenidas.

Si planteamos el teorema del coseno para el triángulo ABL de la figura 2 tenemos:

$$R_B^2 = R_A^2 + AB^2 - 2R_A AB \cos \beta. \quad (1)$$

Esta ecuación tiene como incógnitas  $R_A$  y  $R_B$ , mientras que los valores del lado AB y el ángulo  $\beta$  se pueden conocer independientemente, como mostraremos.

Para relacionar  $R_A$  y  $R_B$ , es necesario considerar el ángulo  $\delta$  subtendido por la Luna (figura 3) y su variación según la distancia. Dado que se trata de un ángulo pequeño ( $\delta \approx 0.5^\circ$ ), vale la expresión

$$\delta \approx \frac{d}{R} \quad (2)$$

Para los puntos A y B la ecuación (2) se particulariza en las siguientes ecuaciones:

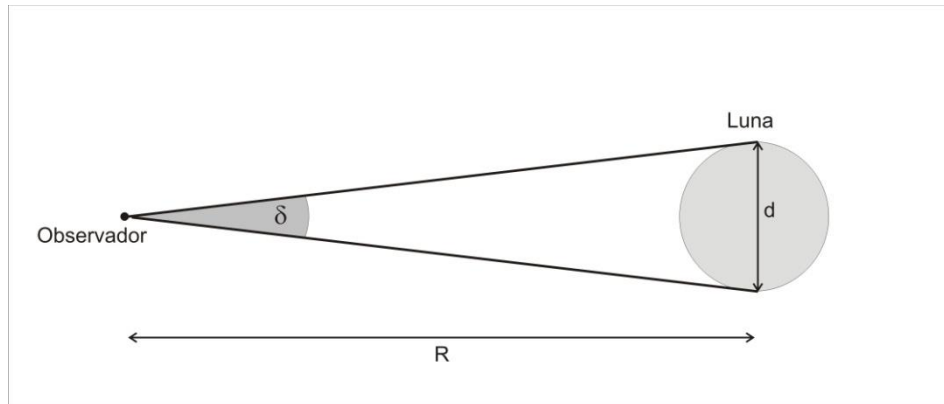
$$\delta_A = \frac{d}{R_A} \quad (2a) \quad \delta_B = \frac{d}{R_B} \quad (2b)$$

donde  $\delta_A$  y  $\delta_B$  son los tamaños angulares de la Luna vistos desde A y B, respectivamente.

Estas variaciones de tamaño angular producen variaciones en el tamaño de la imagen, lo cual significa cambios en la cantidad de píxeles que la Luna ocupa en una

dada foto. Tenemos entonces que el tamaño angular es proporcional al número de píxeles de la imagen:

$$\delta = k N \quad (3)$$



**Figura 3** - Ángulo  $\delta$  subtendido por la Luna vista por un observador desde la superficie terrestre.

**Fuente:** gráfico de los autores.

En la ecuación (3)  $N$  es el número de píxeles ocupado por la Luna y  $k$  es el factor de conversión entre píxeles y tamaño angular  $\delta$ . Por otro lado, la ecuación (3) para A y B a su vez se particulariza para las posiciones A y B:

$$\delta_A = k N_A \quad (3a)$$

$$\delta_B = k N_B \quad (3b)$$

Siendo  $N_A$  y  $N_B$  el número de píxeles de la imagen lunar desde A y B, respectivamente.

De las ecuaciones (2a) y (2b) se obtiene:

$$\delta_A R_A = \delta_B R_B \quad (4)$$

Sí relacionamos (3a), (3b) y (4) resulta inmediata la relación entre distancias y píxeles:

$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{N_A}{N_B} \quad (5)$$

La razón  $N_A/N_B$  obtenible a partir de las imágenes nos proporciona la relación entre las distancias  $R_B$  y  $R_A$ .

Cabe señalar que la relación  $N_A/N_B$ , tal como lo muestra el desarrollo precedente, es una razón entre los diámetros de la Luna en las imágenes obtenidas. Sin embargo, la misma razón  $N_A/N_B$  debe cumplirse también para las distancias en píxeles entre cualquier par de puntos homólogos en ambas fotografías como, por ejemplo, dos cráteres. De esta forma se puede aprovechar mejor la información de las fotografías y sobre esta base se trabaja más adelante en la Sección 3. Análisis de imágenes.

Las ecuaciones (1) y (5) contienen como incógnitas las distancias a la Luna desde A y desde B, en tanto el ángulo  $\beta$  y el lado AB se pueden calcular teniendo en cuenta el radio y la rotación terrestre entre las dos tomas fotográficas.

El ángulo  $\beta$  se relaciona con  $\alpha$  mediante la expresión  $\beta = 90^\circ + \alpha / 2$ . Por su lado,  $\alpha$  es el ángulo que rotó la Tierra en el paso de A a B menos el pequeño ángulo de avance de la Luna hacia el este debido a su movimiento orbital. Tenemos entonces:

$$\alpha = \omega_T t - \omega_L t \quad (6)$$

Aquí  $t$  es el intervalo entre observaciones,  $\omega_T = 0.2626 \text{ h}^{-1}$  es la velocidad angular de rotación terrestre, y  $\omega_L = 0.00958 \text{ h}^{-1}$  es la velocidad angular media de la Luna en su órbita en torno a la Tierra. El uso de esta velocidad media para estimar el avance hacia el este de la Luna es una buena aproximación si las comparamos con datos obtenidos de sitios especializados (NAVAL OCEANOGRAPHY PORTAL) o mediante programas libres como Winstars 1.0 o Stellarium (WINSTARS; STELLARIUM), de modo que ambas formas de calcular resultan adecuadas.

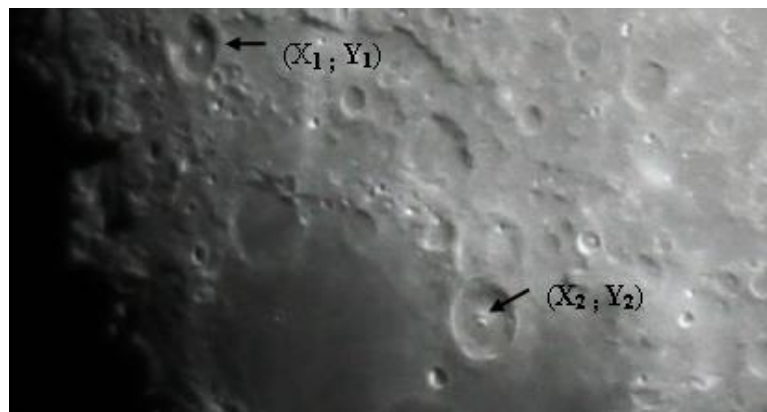
El lado AB (cuerda que separa las posiciones de observación) se calcula como:

$$AB = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) R_{AB} \quad (7)$$

donde  $R_{AB}$  es el radio del paralelo del lugar de observación. Tenemos entonces:  $R_{AB} = R_T \cos(\lambda)$ , con un radio terrestre  $R_T = 6371 \text{ km}$  y la latitud local  $\lambda$ .

#### 4 Análisis de las imágenes

Las fotografías poseen una rica información sobre la topografía lunar que nos servirá para obtener la importante relación  $N_A/N_B$ . Para ello, seleccionamos pares de puntos notables como pueden ser bordes de cráteres o sus picos centrales, y usando el programa Microsoft(R) Paint determinamos las coordenadas en píxeles de los puntos elegidos.



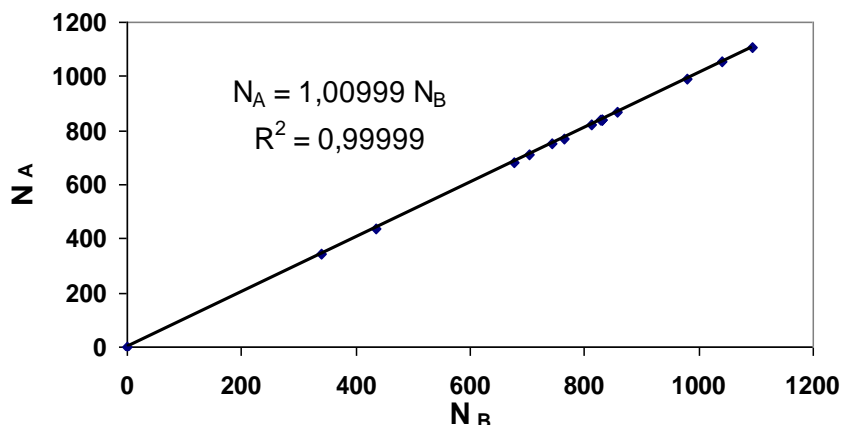
**Figura 4** - Sector ampliado de una de las fotografías obtenidas de la Luna. Se aprecia el nivel de detalle obtenido y se señala un par de puntos notables. La distancia en píxeles entre ellos es esencial para el análisis de las imágenes.  
**Fuente:** Imagen de los autores.

En la Figura 4 se señalan las coordenadas  $(x_1; y_1)$  y  $(x_2; y_2)$  de un par de puntos notables. La distancia en píxeles entre ellos es  $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$ . Si reiteramos el procedimiento con los mismos puntos de la superficie lunar pero utilizando la

segunda fotografía (correspondiente a la Luna más cercana) veremos que la distancia en píxeles entre ellos es mayor, aproximadamente en un 1 %.

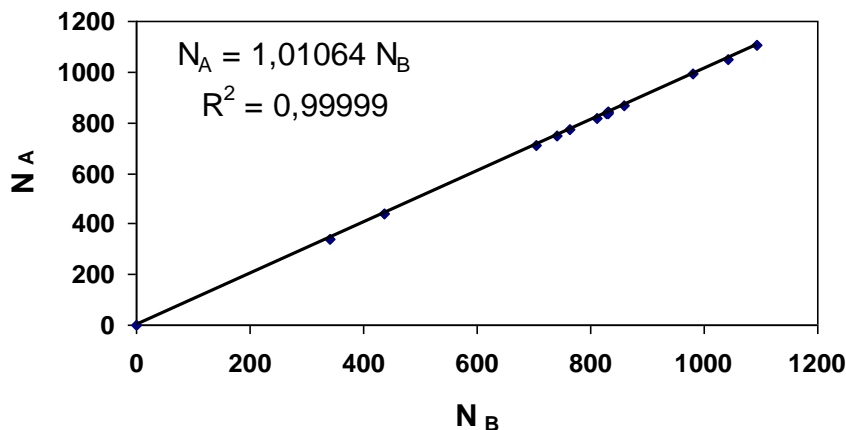
Estas variaciones de distancia angular son bastante pequeñas y susceptibles de ser aleatoriamente afectadas por la turbulencia atmosférica. Debido a ello se ha trabajado con un conjunto de pares de puntos situados a diferentes distancias y ubicados en distintos puntos de la superficie.

En base a los datos obtenidos se estimó la correlación entre los puntos correspondientes a las imágenes de la Luna en posición cercana y en posición lejana.



**Gráfico 1** - Correlación de las distancias entre pares de puntos homólogos para las dos observaciones de febrero.  $N_B$  corresponde a la distancia en píxeles con la Luna lejana (posición B) y  $N_A$  corresponde a la distancia en píxeles entre los mismos pares de puntos para la luna lejana (posición A).

**Fuente:** Gráfico elaborado con datos obtenidos por los autores.



**Gráfico 2** -Gráfico 2: Correlación de las distancias entre pares de puntos homólogos para las dos observaciones de abril.  $N_B$  corresponde a la distancia en píxeles entre pares de puntos con la Luna lejana (posición B) y  $N_A$  corresponde a la distancia entre los mismos pares de puntos para la luna lejana (posición A).

**Fuente:** Gráfico elaborado con datos obtenidos por los autores.

Los resultados de los gráficos precedentes muestran una esperable relación de proporcionalidad entre las distancias en píxeles de los puntos homólogos de ambas



imágenes. Las pendientes de las rectas obtenidas por regresión proporcionan el cociente  $N_A/N_B$ . Tenemos entonces:

$$\frac{N_A}{N_B} = 1.00999 \pm 0.00029 \quad \text{Observación de febrero}$$

$$\frac{N_A}{N_B} = 1.01064 \pm 0.00085 \quad \text{Observación de abril}$$

## 5 Cálculos de distancias

De las ecuaciones 4 y 5 obtenemos la ecuación cuadrática en  $R_A$ :

$$R_A^2 \left[ \left( \frac{N_A}{N_B} \right)^2 - 1 \right] + 2 AB \cos(\beta) R_A - AB^2 = 0 \quad (8)$$

La solución para el caso de febrero resulta:

$$R_A = 367153 \text{ km}$$

La propagación del error de la pendiente nos conduce a un rango de distancias que va desde 356542 km a 378893km, lo cual representa un error aproximado del 3%.

Para estimar la distancia al centro de la Tierra  $R_{CT}$ , y dada la altura de la Luna sobre el meridiano, podemos directamente sumar el radio terrestre (esta aproximación difiere del valor exacto en sólo pocos centenares de kilómetros que son despreciables comparados con los errores ya mostrados). Obtenemos entonces:

$$R_{CT} = 373523 \text{ km}$$

La distancia proporcionada por el programa Winstars para esta ocasión es 368030 km, de modo que la estimación realizada está 1.4 % encima del valor exacto.

De igual forma obtenemos la distancia para el caso de abril:

$$R_{CT} = 372626 \text{ km}$$

que resultó un 3.8 % mayor que el valor exacto de 358836 km. En este caso, el error de la distancia se situó en torno al 10 %, probablemente debido a una mayor turbulencia atmosférica durante esa noche.

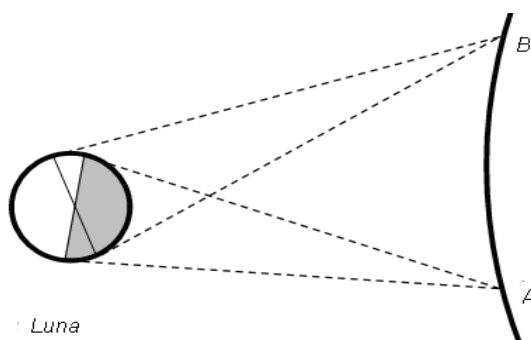
## 6 Discusión

El análisis desarrollado supone que la única causa de la variación del tamaño angular de la Luna se debe al alejamiento o acercamiento del observador debido a la rotación terrestre. Sin embargo, puede haber otros factores distintos a las turbulencias citadas y que contribuyan a esa variación.

Uno de ellos es la refracción que hace aparecer a los astros a mayor altura, más notablemente en cercanías del horizonte. En posiciones bajas, los bordes superior e inferior de la Luna sufrirían una refracción diferencial que achataría verticalmente la imagen.

No hemos podido detectar tal fenómeno en el análisis de las fotos del satélite a baja altura. De todas maneras, hemos usado fórmulas de refracción atmosféricas (LEHN, 2005; THOMAS y JOSEPH, 1996) para estimar el orden de la contracción vertical para la Luna situada a unos  $18^\circ$  o  $19^\circ$  de altura, que son las posiciones más bajas captadas y que sufren el mayor efecto de la refracción. Utilizamos la tabla del trabajo de Thomas para calcular el achatamiento de la imagen lunar. Para  $18^\circ$  y  $19^\circ$  corresponden valores de desviación por refracción de 2.9 y 2.8 minutos de arco, respectivamente, que tienen entre sí una escasa diferencia de 6 segundos de arco. Pero dado que nuestro satélite muestra un tamaño angular aproximado de  $0.5^\circ$ , se puede estimar mediante una interpolación lineal la variación de altura entre los bordes superior e inferior en aproximadamente 3 segundos de arco, bastante menor comparado con los cerca de 1800 segundos del tamaño lunar total. Para ponderar este efecto en las imágenes con las cuales hemos trabajado, consideramos una relación de 0.8 pixeles/segundo. Los 3 segundos de diferencia calculados representan unos 2.5 pixeles en la fotografía. Este valor es casi 10 veces menor que la variación del tamaño del diámetro lunar efectivamente observada y, por otro lado, se halla prácticamente en el límite de resolución del equipo utilizado. En síntesis, la estimación de la deformación de la imagen a las alturas bajas con las que trabajamos muestra, para este caso, el papel secundario de la refracción en la variación de distancia entre pares de puntos de la superficie lunar.

Otro factor a considerar es la libración diurna (MULHOLLAND; SILVERBERG, 1971) que permite al observador ver (o dejar de ver) puntos muy cercanos al borde lunar y esto se debe al simple hecho de que la rotación terrestre le cambia la perspectiva (Figura 5).



**Figura 5** - Libración diurna de la Luna.  
**Fuente:** Gráfico de los autores.

Las regiones situadas hacia los extremos este u oeste de la Luna son las candidatas evidentes para mostrar el efecto. No hemos observado diferencias notables en nuestras imágenes al examinar los bordes mencionados. Es probable que esto se deba al escaso lapso entre fotografías.

El fenómeno en unas 12 horas produce, según los datos, sólo  $1^\circ$  de libración, pero nuestra observación lleva 5 horas y en ese lapso más corto el desplazamiento de

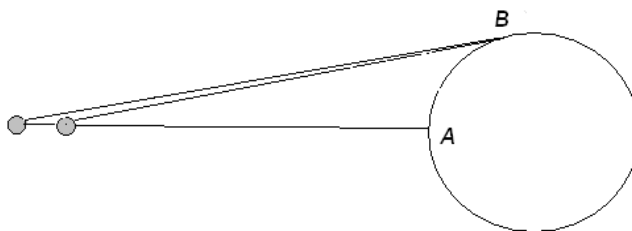
puntos extremos se situaría en 1-2 píxeles. Concluimos entonces que la libración juega un papel marginal en el análisis de imágenes con las que trabajamos.

Por otro lado, tenemos una cuestión distinta a las anteriores. Sabemos que la Luna tiene una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Sin embargo, el movimiento radial puede ser despreciado ya que no puede ser detectado por el dispositivo en las 5 horas que requiere el método. Para ver esto consideremos una observación desde el punto A (figura 6a) que presenta las mejores condiciones para detectar una variación de tamaño debida a un movimiento radial. Llamamos  $R_d$  a la distancia de la Luna lejana,  $R_c$  a la distancia de la Luna cercana y  $N_d$  y  $N_c$  a los respectivos tamaños de las imágenes (en píxeles). Tenemos entonces, de acuerdo con (5):

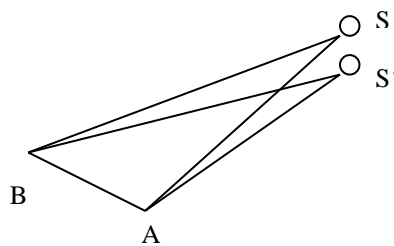
$$\frac{R_d}{R_c} = \frac{N_c}{N_d}$$

Para el caso de febrero la distancia radial disminuyó de 368142 km a 368030 km (-112 km) y en abril esta distancia aumentó de 358837 a 358850 km (+13 km). En el caso de mayor movimiento radial (febrero) y para un tamaño de imagen de unos 1500 píxeles, hemos calculado una variación menor que 1 píxel. Desde el punto B sólo se percibe una proyección de ese movimiento radial, por tanto la estimación precedente es aún menor.

(a)



(b)



**Figura 6** - Efectos sobre el tamaño de la imagen:  
a) Movimiento radial de la Luna, b) Declinación lunar.  
**Fuente:** Gráficos de los autores.

Finalmente, consideramos la variación de declinación que se da durante la segunda estimación de distancia: la Luna no conserva la posición S (figura 6a) para la triangulación sino que se desplaza hacia S' y los planos que contienen los triángulos ABS y ABS' forman un ángulo de alrededor de 1°. Sin embargo, si el movimiento radial del satélite se encuentra dentro del rango discutido previamente, resultará que los dos

triángulos en cuestión son iguales y su resolución es equivalente. En la práctica esto significa que la triangulación es procedente en ambos casos. Adicionalmente, la resolución de este par de triángulos no coplanares (pero iguales y compartiendo el lado AB) justifica el uso de la figura 2 como base geométrica del método.

## 7 Conclusiones

Los resultados muestran que es posible calcular la distancia a la Luna con confiable precisión tomando un par de fotografías en un intervalo de pocas horas. Pensamos que cualquier estudiante interesado en esta tarea astronómica y que cuente con un telescopio y una cámara puede realizar la experiencia. Fotografiar la Luna es relativamente fácil debido a su gran luminosidad. El método requiere de imágenes fotográficas instantáneas por lo que no se necesita una montura motorizada para seguimiento de astros.

Por otro lado, el procesado de imágenes es sencillo y se puede llevar a cabo con programas de amplia difusión; además las imágenes en sí resultan un material de trabajo atractivo dada la riqueza de accidentes en la superficie de nuestro satélite. Con respecto a los cálculos, el uso de álgebra elemental y trigonometría básica permite que la experiencia sea accesible incluso para alumnos de nivel secundario.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo del Proyecto UNGS-IDEI 30/4077.

## Referencias

CELNIKIER L. M. Weighing the Earth with a sextant. **American Journal of Physics**, v.51, n.11, p.1018-1020, 1983.

CENADELLI D. et al. An international parallax campaign to measure distance to the Moon and Mars. **European Journal of Physics**, v.30, p.35-46, 2009.

DERMAN S. Aristarchus at your service. **The Physics Teacher**, v.38, p.574-575, 2000.

GOOGLE EARTH. Disponible en: <<http://earth.google.com/>>.

HUGHES, S. W. Measuring the orbital period of the Moon using a digital camera. **Physics Education**, v.41, n.2, p.144-150, 2006.

LEHN, W. H.; VAN DER WER, S. Atmospheric refraction: a history. **Applied Optics**, v.44, n.27, p.5624-5636, 2005.

LOUGH T.; KELLIE A.; HEE K. Determining the instantaneous distance to the moon by direct triangulation. **European Journal of Physics**, v.27, p.1121-1132, 2006.

MULHOLLAND J. D.; SILVERBERG, E. C. Measurement of physical librations using laser retroreflectors. CONFERENCE ON LUNAR GEOPHYSICS, October 18-21, 1971, Kluwer Academic Publishers.

NAVAL OCEANOGRAPHY PORTAL. Disponible en: <<http://aa.usno.navy.mil/data/docs/geocentric.php>>.

OLIVIERI, N.; RODRÍGUEZ, E.E. Reunión Nacional de Física AFA 2010, Disponible en: <[http://95rnf.afa.webfactional.com/tex\\_files/Resumenes/EF/olivieri.pdf](http://95rnf.afa.webfactional.com/tex_files/Resumenes/EF/olivieri.pdf)>.

PAOLANTONIO, S.; PINTADO, O. I. Astronomy at school: Measurement of Earth-Moon distance. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia, RELEA**, n.3, p.7-18, 2006.

PELLIZA, L. J. et al. An experiment to measure the instantaneous distance to the Moon. **American Journal of Physics**, v.82, n.4, p.311-314, 2014.

SARTON, E. J. Measuring the Moon's orbit. **The Physics Teacher**, v.18, n.7, p.504-509, 1980.

STELLARIUM. Disponible en: <<http://www.stellarium.org>>.

THOMAS, M. E.; JOSEPH, R. I. Astronomical refraction. **John Hopkins apl technical digest**, v.17, n.3, 1996.

WINSTARS 1.0. Disponible en: <<http://www.winstars.net/english/index.html>>.

---

Artigo recebido em 25/11/2016.

Aceito em 10/03/2017.