

ERATÓSTENES: UN EJEMPLO DE TRABAJO CON ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN DIDÁCTICA E HISTORIA DE LA ASTRONOMÍA

*Nicoletta Lanciano*¹
*Mariangela Berardo*²

Resumen: Mediante el análisis de un ejemplo práctico, se presenta la riqueza que emerge del método de los indicios para introducir la práctica de la historia de la Astronomía. Este método fue probado con estudiantes universitarios y profesores en formación. En el caso analizado, el tema de investigación para los estudiantes es el trabajo de Eratóstenes para medir el meridiano terrestre. El curso se construye y desarrolla a través de la “cadena de preguntas y respuestas”. A partir de la pregunta original, nuevas problemáticas toman forma y los estudiantes aprenden a buscar posibles respuestas y soluciones.

Palabras clave: Método de los indicios; Didáctica de las ciencias en el ámbito universitario y de formación inicial y continua; Eratóstenes; Historia de las ciencias; Aproximaciones y errores.

ERATÓSTENES: UM EXEMPLO DE TRABALHO COM ESTUDANTES UNIVERSITÁRIOS EM DIDÁTICA E HISTÓRIA DA ASTRONOMIA

Resumo: Por meio da análise de um exemplo prático, se apresenta a riqueza que emerge do método dos indícios para introduzir a prática da história da Astronomia. Este método foi testado com estudantes universitários e professores. No caso analisado, o tópico de pesquisa dos estudantes foi o trabalho de Eratóstenes para medir o meridiano terrestre. O curso se constrói e desenvolve através de uma “corrente de perguntas e respostas”. A partir da pergunta original, novas problemáticas tomam forma e os estudantes aprendem a procurar possíveis respostas e soluções.

Palavras-chave: Método dos indícios; Didática das ciências no nível universitário e de formação inicial e contínua; Eratóstenes; História das ciências; Aproximações e erros.

ERATHOSTENES: AN EXAMPLE OF WORK WITH UNIVERSITY STUDENTS IN DIDACTICS AND HISTORY OF ASTRONOMY

Abstract: We present below, through an example, the richness of the use of a method of clues to enter the history of Astronomy, tested with university students and teachers in training. The question presented as an example is the study of the work of Eratosthenes to measure the Earth's meridian. It shows how the course generates a chain of questions and new questions and problems arise as the students learn to look for answers and solutions.

Keywords: Method circumstantial/for clues; University teaching and training teachers; Eratosthenes; History of sciences; Approximations and errors.

¹ Sapienza Università di Roma y MCE – Italia. E-mail: <nicoletta.lanciano@uniroma1.it>.

² MCE Movimento di Cooperazione Educativa – Italia. E-mail: <mariangela.berardo@gmail.com>.

1 Introducción

El objetivo de este artículo es hacer hincapié en lo importante que resulta, en la práctica docente, mantener una atención especial al problema de las fuentes y traducciones a través de las cuales se estudian los textos antiguos. El uso de un gran número de anécdotas históricas es el método utilizado a menudo en las escuelas para describir los acontecimientos clave de la historia de la ciencia. Este método está relacionado con una construcción de la historia lineal y positivista, sin tener en cuenta los contextos que hayan favorecido, detenido o incluso atrasado su desarrollo. Por ello, proponemos "tratar a fondo un problema", de tal suerte de exponer su complejidad, destacando la multiplicidad de sus relaciones y posibles aproximaciones, y las diferentes escalas en las que podemos estudiar el mismo problema.

El trabajo sobre los aspectos históricos es particularmente útil de manera especial para trabajar algunas cuestiones específicas de la educación científica. Esto se reflejará en la construcción del conocimiento, del cómo y porqué del mismo, ya que a veces algunos matices de conocimiento se han olvidado o algún aspecto permanece oculto. Este permite repensar también los errores cometidos en la historia, aun si estos errores permitieron adquirir conocimientos que hoy pueden ser considerados obvios y disponibles desde siempre para todos.

Además, es importante aprender a reconocer la diferencia entre fuentes primarias, secundarias e intermedias de los trabajos de los antiguos griegos (en este caso). En nuestro caso, se trata de los autores antiguos que se conocen, aun cuando las fuentes primarias se han perdido total o parcialmente.

También es importante conocer la historia de los textos antiguos, no solo para reconocer el legado que sus autores nos han dejado en sus propios textos, sino también en sus concepciones de la manera que han sido relatadas por otros autores en los objetos, imágenes y construcciones. Por lo tanto, es esencial para aprender a buscar, leer, seleccionar, comprender y disfrutar de estos testimonios, y para ello es necesario formar estudiantes sensibles a estos temas, ya que oportunamente se les presentará en su trabajo educativo. Del mismo modo, consideramos fundamental que los estudiantes o profesores (en formación) se encuentren con los mismos obstáculos epistemológicos que se han encontrado los autores en la historia del pensamiento científico. Los estudiantes se ven obligados a pensar en diferentes ejes: ¿Cuál era el valor absoluto o relativo de ciertos conocimientos en relación al momento en que fueron ideados? ¿Qué errores han obstaculizado el desarrollo de un nuevo conocimiento? ¿Qué errores y aproximaciones, por el contrario, permitieron llegar a nuevos conocimientos, incluso si no todo era correcto?

Esta perspectiva, como educadores, nos hace también aprender a tolerar y manejar los errores de los estudiantes. El enfoque histórico ayuda a desarrollar un ojo crítico, incluso para los conocimientos actuales, ya que ellos son sólo una parte de la historia que todavía está en curso. Una mirada crítica sobre el papel desempeñado por las distintas ramas del saber, en diferentes épocas y sociedades, muestra cómo la división del conocimiento en disciplinas separadas puede ser muy exitosa, pero también es limitante. En nuestro curso, las disciplinas que entran en juego son siempre plurales: en el caso estudiado, la Astronomía es acompañada por la Geografía y las Matemáticas. La dimensión histórica y cultural hace que sea posible presentar estas disciplinas como

actividades intelectuales que no son neutrales y absolutas, sino como un proceso, y no como un objeto concluido y ahistórico.

En este trabajo utilizamos el método de los indicios para reconstruir la obra de geógrafo Eratóstenes, que en el siglo III antes de Cristo consiguió una medida del meridiano y con él calculó la circunferencia de la Tierra. Las diferentes versiones del enfoque utilizado por Eratóstenes que se encuentran en los libros de texto, en ciencias e historia de la Astronomía, son analizadas durante el curso y se discuten sus diferencias de manera crítica.

2 Metodología

2.1 Didáctica universitaria cooperativa

El método considerado tiene sus raíces en la práctica educativa del *Movimento di Cooperazione Educativa Pedagogía Freinet* (MCE) en la didáctica de la Astronomía y las Matemáticas, y no en la investigación de la historia de la Ciencia en el sentido estricto. Por lo tanto, es un enfoque que puede ser definido como "artesanal": se utiliza una práctica docente que "empuja" al profesor, así como a los estudiantes, a adoptar una actitud de "investigación". Esto significa que "trabajan juntos, se están preguntando y buscando algo que no conocen totalmente *a priori*, realizan o no descubrimientos, crecen juntos en el conocimiento del objeto de estudio".

Sin embargo, el profesor es más consciente de los diferentes elementos de la investigación, ya que examinó previamente los textos y desarrolló las preguntas iniciales para proponer al grupo. Tiene un fondo más amplio de los conocimientos y conceptos relacionados con la disciplina, y utiliza sus habilidades de enseñanza solicitando a los estudiantes con su método socrático. Y detiene (si es necesario) a alguno de ellos que expone el conocimiento "ya conocido" y que impide a los otros de construir su propio camino de interrogatorio e investigación. El profesor es el que sostiene la línea de investigación: proporciona el material, los textos y las medidas para efectuar la búsqueda. La tarea del profesor es responder a una pregunta formulada con otras cuestiones, para advertir si el grupo utiliza inconscientemente implícitos, para poner en relieve si las creencias compartidas por el grupo en su conjunto son una respuesta o un nuevo problema.

En la práctica, el profesor es la salvaguarda del espíritu de investigación y mantiene el encadenamiento de las preguntas que se plantean. Los resúmenes de elementos en común son útiles para efectuar síntesis parciales, resaltar los conocimientos adquiridos, los que quedan por explorar, y para revisar los cuestionamientos que permanecen abiertos.

A veces, durante la lección se propone una especie de "contemplación" silenciosa de imágenes, textos, instrumentos de medición y modelos: la invitación es a dedicar tiempo para examinar los objetos como cosas que pueden hablar, se pregunta sin temor a equivocarse o a ser inadecuado para hacer una pregunta, porque todas las preguntas son potencialmente relevantes: todas las preguntas están permitidas, pero tal vez no todas serán respondidas. Este procedimiento corresponde a "perder el tiempo" en el sentido didáctico indicado por Emma Castelnuovo: una pérdida de tiempo productiva

y necesaria para el desarrollo de la inteligencia y la construcción del conocimiento personal. Esto significa no ser “prensado” o “pensar”, sino dar la bienvenida a los comentarios de las asociaciones mentales de los alumnos que comparan y organizan la información y los datos.

La intención explícita es mostrar una práctica de enseñanza en la que trabajamos mucho sobre el mismo tema, pero con el fin de conocer sus aspectos de complejidad. Dar una clase magistral podría responder rápidamente a la pregunta planteada al inicio del curso. La elección de trabajar con el proceso que se describe en detalle a continuación está dictada por la convicción de que en el contexto de la educación, un elemento de éxito es “dar un buen ejemplo de la práctica de la enseñanza”. Esto permite a los estudiantes situarse en un verdadero proceso científico de la construcción colectiva del conocimiento, en la que algunos frenan y plantean preguntas en digresión, o alguien tiene una idea básica para resolver el problema o presenta un modelo que permite la comprensión de los demás, tal como sucede en la comunidad científica. Es necesario, en nuestra opinión, que los maestros y educadores se pongan en situaciones en las que se permita construir, de forma independiente, las competencias transversales tales como la creatividad, la reflexividad y la capacidad de cooperación. Para ello hemos creado las técnicas de aprendizaje activo y cooperativo con el fin de desarrollar la autoestima, la creatividad y la confianza en su propia capacidad de reflexión. Esto se puede realizar, entre otras formas, a través de la elaboración de textos de reflexión escritos durante éste proceso de aprendizaje.

A respecto de los errores incurridos, es evidente desde el principio del curso que son muy útiles a su desarrollo. Para superar las dificultades cognitivas se deben desarrollar actividades frecuentes, incluyendo actividades prácticas, seguidas de fases de conceptualización. Por ejemplo, cuando nos dimos cuenta de que el concepto de "latitud" en el caso analizado aquí presentaba dificultades para la comprensión, hemos propuesto la construcción de modelos tridimensionales para hacer más evidente la definición teórica (LANCIANO, 2014).

2.2 Empezar con una sola cuestión estimulante

En el curso de Didáctica de las Ciencias, hemos construido un método que llamamos "de los indicios" en el sentido de que empezamos compartiendo unos indicios variados para ayudar a resolver un problema complejo. La cuestión que nos planteamos para empezar puede parecer trivial para algunos, para otros imposible porque todas las palabras son "desconocidas", o para otros sin interés por ser demasiado "especializada".

A cada año del curso el camino de búsqueda se relaciona a un personaje, un científico, especialmente un astrónomo, a las particularidades de su tiempo, a los lugares en los que trabajó y a las preguntas que se ha planteado. Por ejemplo, cuando nos preguntamos "¿por qué Copérnico estaba en Roma en el año 1500?" hicimos un recorrido en la zona de la iglesia *de San Ivo alla Sapienza*, sede en 1500 de la Universidad, donde Copérnico estaba de visita; en la *Academia de Ciencias de Polonia* (el trabajo de Copérnico estaba escrito en polaco), se analizaron documentos (muchos de los cuales estaban escritos en latín o en polaco) añadiendo así un nuevo reto, el de la lengua, lo que nos llevó a utilizar otros tipos de indicios para comprender los textos. Para trabajar sobre Galileo, la atención recayó en sus viajes por Italia. Las mediciones

de espacio y tiempo fueron centrales: los años, en 1600, no se calcularon a partir del mismo día en los Estados Pontificios y el Gran Ducado de Toscana y de Pisa, y también se midieron las horas de acuerdo con el sistema horario correspondiente. El estudio de su extensa correspondencia, lo que da una idea de la vitalidad de la comunidad científica europea de la época, permite escapar de un aislamiento científico que a veces los grandes nombres de la historia pueden hacer imaginar.

Al inicio del curso se preparó un panel en el que estaba escrita la pregunta original, y que se completó más adelante, junto con las suposiciones, los conocimientos y las preguntas emergentes. Cuando se trabajó con Tolomeo, la pregunta original era "¿cómo Tolomeo podía calcular la latitud de Roma?". Para responder a esta pregunta, nos preguntamos por el conocimiento geográfico previo a Tolomeo en el Mediterráneo, y fue durante esta investigación donde nacieron la reflexión y el desarrollo de la experiencia de Eratóstenes, que son el propósito de este trabajo.

3 Eratóstenes: el camino por medio de indicios

El texto presentado se relata a un trabajo didáctico llevado a cabo más veces con estudiantes universitarios por un total de casi 25 horas, y con un grupo de docentes en formación continua a través de una práctica residencial, con una duración de diez horas. La secuencia de preguntas, así como las hipótesis y las imágenes producidas y elaboradas, son relacionadas con las experiencias realizadas, según la pedagogía Freinet que utiliza el "método de la mayéutica socrática" y que trabaja sobre el origen y la construcción de las preguntas más que sobre la transmisión/adquisición de nociones. Numerosos grupos, escuelas y aficionados han organizado experimentos que replican, de un modo u otro, y en diferentes niveles, la medida del radio de la Tierra inspirada en el trabajo de Eratóstenes. Cientos de grupos han trabajado en este tema con grupos de estudiantes, pero nuestro enfoque es presentar una reflexión sobre las numerosas preguntas que pueden haber quedado sin respuesta, o que tienen una respuesta no trivial: en cambio, este mismo problema está presentado en los textos y sitios de internet como una experiencia con una trayectoria lineal y "simple", sin presentar dudas y cuestiones abiertas. Para un primer acercamiento al problema escribimos la pregunta que le da origen al trabajo, en una hoja grande de papel "¿Cuál problema se planteó Eratóstenes?". Esta es la primera pregunta que genera, en las lecciones del curso, una serie de otras cuestiones.

3.1 La primera pregunta: "¿Quién fue Eratóstenes?"

Cuando preguntamos "¿cuál problema se planteó Eratóstenes?", la primera cuestión que los estudiantes plantean de inmediato es "¿quién fue Eratóstenes?". Claramente era una persona que tenía una cuestión, y realizó una investigación. Alguien responde: "fue un matemático, un filósofo, un griego que estaba en Egipto"; después esta información se hace más precisa y llegamos a decir que Eratóstenes había nacido en la costa de África, en Cirene, había estudiado en Atenas, y trabajaba en Alejandría, donde fue responsable de la Gran Biblioteca. Esto significa que en el mar Mediterráneo las personas conocían los países y las escuelas científicas cercanas, donde por lo menos los científicos cruzaban el mar, se encontraban y se escribían.

Nace así una segunda pregunta: “¿en qué lugares trabajó?”. Seguramente alguien recuerda una historia que involucra Alejandria y Siena, pero “¿Eratóstenes, que trabajaba en Alejandria, había estado personalmente en Siena?” Estudiamos un mapa del valle del Nilo realizado en 1500 con los datos de la Geografía de Tolomeo. “¿En qué época trabajaba Eratóstenes?” Sabemos que precede a Tolomeo (siglo II dC), pero algunos de los estudiantes mencionan la hipótesis que vivió en el II-I siglo aC, después de Tales de Mileto, quien vivió en el siglo VI antes de Cristo. Finalmente, podemos dar una respuesta a nuestra primera pregunta: el problema del geógrafo Eratóstenes era establecer el tamaño de la Tierra, entonces precisaba medir su radio.

3.2 “¿Que sabía Eratóstenes y cuáles son sus observaciones?”

Para seguir en la investigación es necesario plantearse una nueva pregunta: “¿Que sabía Eratóstenes y cuáles son sus observaciones?”.

Eratóstenes observaba las sombras del Sol en diferentes épocas del año y señaló que el mismo día en Alejandria y Siena, que está más al Sur, las sombras de los objetos verticales del mismo tamaño no tienen la misma longitud. Especialmente Eratóstenes encontró (directamente, a menos que lo supiera indirectamente) que el día del Solsticio de Verano al mediodía, la sombra medida con el cuenco hemisférico en Alejandria es $1/50$ del círculo máximo del cuenco (el cuenco es un hemisferio cóncavo con un gnomon en el medio del mismo tamaño del radio de la esfera), y por lo tanto el ángulo entre los rayos del Sol y el *gnomon* vertical en Alejandria tiene un valor de $1/50$ de 360° , o sea de $7^\circ 12'$ (Figura 1).

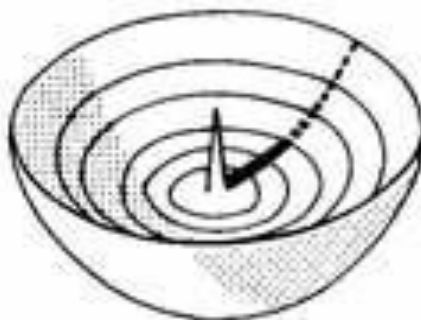
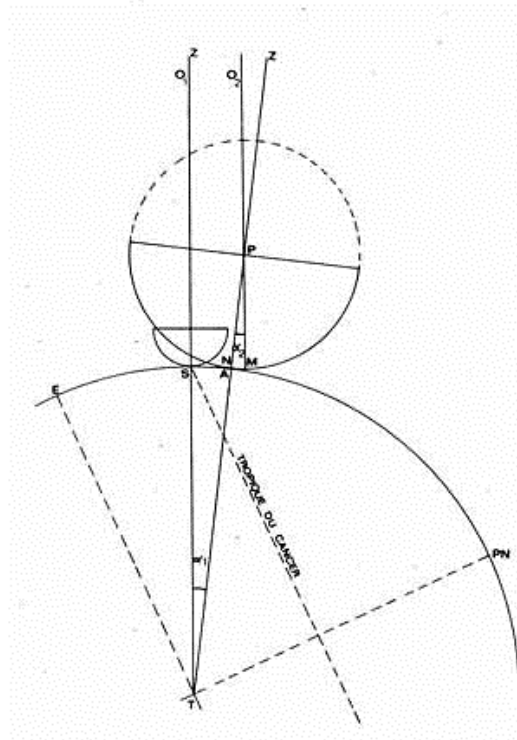


Figura 1 - Reloj de Sol: cuenco hemisférico con el *gnomon* en el centro.

Fonte: (CLEÓMEDES, p.245).

Se observa que en Alejandria, los rayos del sol forman un ángulo de $7^\circ 12'$ con la dirección del Zenit, mientras que en la ciudad de Siena (casi en el Trópico de Cáncer), donde el Sol pasa por el Zenit el mismo día, este ángulo es de 0° y el Sol ilumina el fondo de un pozo con su eje posicionado radialmente desde el centro de la Tierra (Figura 2).



3.3 El método de Eratóstenes

Eratóstenes sabe que la distancia entre las dos ciudades, Alejandria y Siena, es de cinco mil estadios; él sabe también que las líneas rectas que inciden sobre líneas paralelas producen ángulos alternos iguales, y que los arcos circulares que se basan en ángulos iguales son proporcionales (CLEÓMEDES, p.124).

Para entender mejor este asunto hacemos unas observaciones directas de las sombras al Sol y nos damos cuenta de que podemos comparar las sombras producidas en un plano horizontal o en un cuenco hemisférico. En la realidad encontramos unos problemas de penumbra y de cálculo exacto de la altitud del Sol sobre el horizonte. Nos damos cuenta también de que con un tubo cilíndrico se puede interceptar los rayos del Sol y medir su inclinación con respecto a un plano. Además, vamos en busca de relojes de Sol antiguos en los museos de Roma. Pero lo que es más problemático es que el texto de Eratóstenes con sus cálculos no nos ha llegado a directamente: nos basamos en fragmentos de noticias reportados por otros, más o menos competentes en la materia, en épocas sucesivas, y sus datos son parcialmente contradictorios. No podemos leer Eratóstenes como se lee a Proust, e incluso como se lee a Platón! Pero afortunadamente, tenemos el texto griego de Cleómedes que describe casi integralmente el método de Eratóstenes y el valor que había encontrado para el meridiano terrestre.

La pregunta de un estudiante expresa su incertidumbre en un pasaje de nuestro trabajo común: “¿por qué el Sol ilumina el fondo de los pozos en Siena? ¿no se debe estar en el Ecuador para que el Sol esté exactamente en el Zenit?”. Este es un error

típico y común, incluso en los adultos, sobre el cual resulta útil pensar. La pregunta sobre el origen de esta "historia del pozo" de Siena nos lleva a conocer el texto de Plinio (siglo I aC). Nacen así otras preguntas: "para ver la luz solar en el fondo del pozo, ¿se debe medir su anchura y su profundidad?".

Se propone profundizar el asunto: no es sólo en la "línea" del trópico al mediodía en el Solsticio de Verano que las sombras desaparecen, sino también lo hacen en una "banda", con un ancho de unos 300 estadios, o sea de unos 50 km en torno de esta línea (CLEÓMEDES p.124). Esta medida da una idea del nivel de precisión en la medición de la longitud de la sombra de un objeto al Sol.

3.4 "¿Cuáles son las hipótesis de Eratóstenes?"

Para dar una interpretación de las observaciones precedentes como lo hizo Eratóstenes, son necesarias algunas hipótesis: "¿Cuáles son las hipótesis de Eratóstenes?"

Eratóstenes hace las siguientes suposiciones:

- Que la Tierra es esférica. Este asunto provoca una gran discusión, porque muchos piensan que hasta Cristóbal Colón o hasta la época de Copérnico se pensaba que la Tierra fuese plana.
- Que Siena está sobre el Trópico del Cáncer.
- Que Alejandría y Siena se encuentran sobre el mismo meridiano
- Que los rayos del Sol, que llegan a la Tierra, son paralelos entre sí.

Un estudiante plantea una nueva pregunta: "¿Porque Eratóstenes descarta que los rayos del Sol diverjan si la Tierra fuese plana, y por qué acoge la idea de que los rayos son paralelos y la Tierra tiene una curvatura?" ¿tiene Eratóstenes, en la antigüedad, una demostración o un intento de demostración para preferir una hipótesis más que la otra? Esta pregunta es el resultado de una buena capacidad de visión espacial. Encontramos en el libro *L'America dimenticata* (RUSSO, 2013, p.121) que en un texto chino de la misma época que Eratóstenes es aceptada la primera hipótesis (Figura 3).

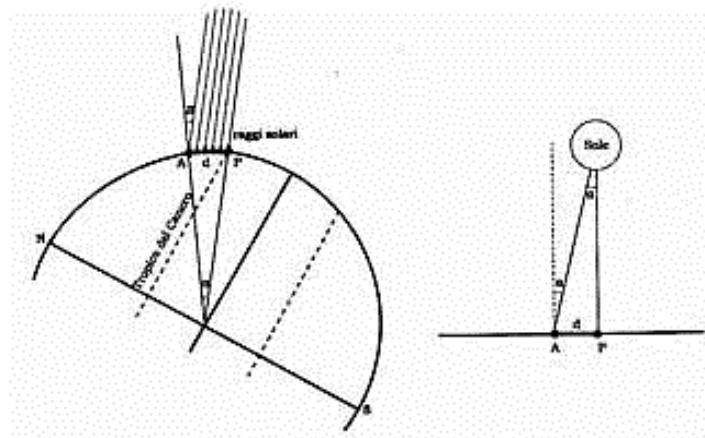


Figura 3 - Dos interpretaciones diferentes, en Grecia (izquierda) y en China (derecha), de los mismos datos.

Fonte: (RUSSO, 2013, p.121).

Las pruebas encontradas en fuentes antiguas se basan en las siguientes observaciones: en un meso-espacio (jardín, patio), es fácil comprobar que los objetos en posición vertical generan sombras paralelas y que, por lo tanto, las hipotenusas de los triángulos formados por los objetos, las sombras y los rayos del Sol, son paralelas entre sí. En el mega-espacio del planeta, ésta condición sólo se cumple si uno hace la fuerte suposición de esfericidad de la Tierra y de una gran distancia entre el Sol y la Tierra.

En el curso se abordan también preguntas propiamente relacionadas con la historia:

- ¿En el siglo III aC, ya se organizaba la Tierra con los meridianos y los paralelos?
- ¿Había en ese momento alguna estrella que tuviera la función de la estrella del Norte?

Buscamos algunos valores geográficos relativos al tercer siglo antes de Cristo:

- Alejandría tenía la latitud de $31^{\circ} 12'$ y longitud de $29^{\circ} 54'$;
- Siena tenía la latitud $24^{\circ} 00'$ y longitud $32^{\circ} 53'$;
- El Trópico de Cáncer tenía la latitud $23^{\circ} 43' 20''$, que es diferente del valor actual que es aproximadamente $23^{\circ} 26'$, es decir, la inclinación del plano del Ecuador respecto del plano de la Eclíptica no es constante.

Observamos, a este respecto, la imagen de una ciudad en México, donde cada año se añade un panel a unos 8 metros del anterior para marcar el movimiento de la línea del Trópico. Esto muestra un movimiento rápido que contrasta con los datos estáticos de la posición de las zonas tropicales transmitidas por la escuela y el sentido común. Esta imagen transmite una información que muestra cómo nuestro conocimiento geográfico es muchas veces rígido y absoluto (WIKIPEDIA, 2016).

3.5 Los cálculos utilizados en su método por Eratóstenes

Como la diferencia angular entre los rayos del Sol en Alejandría y Siena, es $1/50$ de 360° o $7,2^{\circ}$ y es igual a la diferencia de latitud entre las dos ciudades (ángulo que se forma en el centro de la Tierra mediante la prolongación de las dos verticales), Cleómedes (I, 10 6) escribe que:

"Por lo tanto, la relación que existe entre el arco del círculo contenido en el hemisferio cóncavo del reloj (la sombra, MN) y el círculo total correspondiente es la misma que la relación del arco de círculo que va de Siena a Alejandría (SA) y el círculo total correspondiente (de la Tierra)." (CLEÓMEDES, p.125, traducción español de Cot). (Ver Figura 2).

De la correspondencia entre los ángulos y arcos, Eratóstenes puede definir y resolver la siguiente proporción:

$$1/50 = (\text{distancia Alejandría-Siena medida en estadios}) / X$$

donde el factor X desconocido es igual a la medida de un meridiano, es decir $2 \pi r$, donde r es el radio de la Tierra, desconocido. Por lo tanto

$$X = 50 \times 5000 \text{ estadios} = 250.000 \text{ estadios}$$

La distancia real entre Siena y Alejandría es de 786 km, muy próxima de 5000 estadios x 157,5 metros, si tomamos como medida de 1 estadio de la época 157,5 metros.

Cleómedes, que es el único autor que escribe íntegramente el razonamiento de Eratóstenes, da el valor de 250.000 estadios y de 1/50 para el ángulo, pero él es un divulgador que está más interesado en el método que en los resultados numéricos precisos. Otros autores proporcionan datos contradictorios: por ejemplo, algunos dan como 5250 estadios la distancia entre Alejandría y Siena y 1/48 para el ángulo medido en Alejandría; a partir de estos datos encontramos $5250 \times 48 = 252.000$ estadios para el meridiano. Si el estadio mide 157,5 m, la circunferencia de la Tierra resulta $157,5 \times 252.000 = 39.690$ km, muy cercana a lo que hoy se estima, como valor medio, de 40.075 km. Eratóstenes habría cometido así un error de aproximadamente 1%.

La inclinación de los rayos del Sol al mediodía, respecto del gnomon vertical en el Solsticio de Verano en Alejandría es de $7^\circ 12' = 7,2^\circ$, y en Siena es de 0° . A partir de ahí se calcula

$$7.2^\circ - 0^\circ = 7,2^\circ.$$

Vale la pena señalar, desde un punto de vista didáctico, que se trata de una diferencia entre dos ángulos, incluso si uno de los dos mide "0 °". Pero el mismo método se puede utilizar con dos sitios que se encuentran en el mismo meridiano en diferentes latitudes, en cualquier otro día del año, y en estos casos los ángulos a medir son 2 además de ser necesario calcular su diferencia. Este es el caso del Solsticio de Invierno, como lo menciona rápidamente Cleómedes.

En resumen, las fuentes históricas antiguas dan para la distancia entre Alejandría y Siena medidas de 5000 o 5250 estadios y para el ángulo medido en Alejandría $7^\circ 12'$ o $7^\circ 30'$. El valor del meridiano correspondiente es igual a 250 000 o 252 000 estadios: el segundo valor proviene del primero o tal vez es un "ajuste" hecho por Eratóstenes, siendo que 252.000 es un número con muchos divisores enteros incluyendo el 6. De hecho 6° constituían un *exacontade* (unidad de medida de ángulos). Descubrimos además que 2520 es divisible por 1, 2, 3, ... 9, 10, y también por 12,14,15,18,20 y muchos otros enteros y luego por 60, 360 y 700: esta es una rica serie de submúltiplos muy útiles. Si aceptamos este valor, nos encontramos con que

$$252000: 360^\circ = 700 \text{ estadios: } 1^\circ$$

Por lo tanto, un grado corresponde a 700 estadios, hecho muy importante en la historia de la medición de la Tierra: Tolomeo, en lugar de adoptar la medida de 700 estadios para 1° , eligió en cambio 500 estadios, como lo había calculado Posidonio, con graves consecuencias posteriores para la cartografía y los viajes. Esto sin contar que existe además el problema del valor en metros del estadio. Esto lleva a otras consideraciones históricas con respecto a cómo se definió el valor del metro como la longitud de $1/400\,000\,000$ del meridiano terrestre: un número sin duda "muy propio" que permite determinar *a posteriori* la longitud exacta del metro.

Además, se plantea la cuestión de cómo era posible medir grandes distancias con precisión y confiabilidad en el suelo en una línea recta entre dos lugares que no se "ven" el uno al otro. Guedj en su libro *Los cabellos de Berenice*, describe la actividad de los *bematistas*, topógrafos que a un ritmo regular eran capaces de mantener el mismo

ritmo de caminata durante días y millas. Esto fue suficiente para contar sus pasos, incluso para estimar grandes distancias.

3.6 “¿Cuáles errores había cometido Eratóstenes y qué aproximaciones hay en sus cálculos?”

A continuación se presentan algunos errores cometidos por Eratóstenes en sus hipótesis:

- Siena no está exactamente en el Trópico
- Alejandría y Siena no están exactamente en el mismo meridiano.

En esta investigación resulta necesario tener datos lo más precisos posible sobre las coordenadas de los lugares en diferentes épocas, además existe la dificultad de saber cuáles eran exactamente los puntos considerados para medir las sombras en las dos ciudades. De aquí resulta el descubrimiento de la dificultad en determinar la longitud de un lugar en contraste a la relativa facilidad (y la variedad de formas) que se conocían en la época de Eratóstenes para determinar la latitud de un lugar. De hecho, la latitud es dada por:

- La altura del polo celeste sobre el horizonte
- La relación de las sombras al mediodía: la más larga del año en el Solsticio de Invierno y la más corta en el Solsticio de Verano
- La relación entre la duración del día más largo y el más corto del año, en los Solsticios.

Todos los círculos meridianos son iguales entre sí: esto significa que, al mismo número de estadios o días de caminata a lo largo de un meridiano corresponde un número igual de grados de latitud. Sin embargo, para las longitudes cuando uno se mueve de este a oeste a lo largo de un paralelo cerca del ecuador o cerca de los polos, el número de grados que corresponde a un estadio o a un día de camino es muy diferente: el máximo de grados que corresponden a 1 estadio se alcanza en el Ecuador y el mínimo cerca del Polo, porque los paralelos tienen medidas diferentes.

Descubrimos el sentido que tienen en algunos mapas, como el *Ecumene* de Tolomeo la indicación, en algunos paralelos, de las millas correspondientes a una diferencia de longitud de 1° . Por lo tanto debemos hacer un cálculo, para cada paralelo, para averiguar la cantidad de millas que corresponden a 1° o cuántos grados corresponden a una cierta distancia lineal.

A través del cálculo del tamaño de la Tierra surge otra pregunta matemática: ¿cuál es el valor utilizado para π por Eratóstenes en el siglo III aC en Alejandría? ¿Es igual o algo mayor que 3? ¿Se trata de un valor expresado a través de una suma de fracciones? ¿Y cómo eran expresadas las partes o fracciones de la unidad angular y de las unidades de medida de longitud lineales en Grecia y en Egipto en esa época?

4 Conclusiones y preguntas abiertas

4.1 Terminar un curso con más preguntas de las que se pusieron al comienzo

La complejidad de las relaciones entre distintos campos del saber, y dentro de una misma disciplina, entre períodos de la historia y entre lugares geográficamente diferentes, aparece en este trabajo en toda su riqueza y como una dimensión esencial del conocimiento. Muchas preguntas, sin embargo, permanecieron abiertas, y surgieron muchas nuevas preguntas en el camino: algunas preguntas quedaron abiertas debido al limitado conocimiento del grupo de estudiantes, para otras preguntas las razones de las dificultades están en la historia de la ciencia. Entre estas:

- No se conoce la ubicación exacta donde se hicieron las medidas en Alejandría y especialmente en Siena
- Eratóstenes, que conocía la geometría de Euclides, ¿midió la distancia entre Alejandría y Siena, que no están en el mismo meridiano, o la distancia entre Alejandría y su proyección ortogonal sobre la línea del Trópico?
- ¿Qué tipo de *gnomon* o reloj de Sol, se utilizó en Alejandría para determinar la sombra con precisión? ¿fue un cuenco hemisférico, como se puede deducir del texto de Cleómedes?
- ¿Cuál método utilizaron los cartógrafos egipcios para medir la distancia entre Alejandría y Siena? ¿Fueron utilizados los bematistas (personas que marchaban con un paso regular en cada fracción de tiempo)?
- ¿Hubo realmente un pozo en Siena, o es parte de la leyenda?
- ¿Cuál medida del estadio utilizó Eratóstenes y a cuántos metros corresponde?
- ¿Calculó Eratóstenes el número de estadios correspondientes a un círculo de la Tierra, o calculó también el número de estadios correspondientes a otros paralelos diferentes del Ecuador? (en el *Ecumene* de Tolomeo encontramos las medidas de Anti-Meroe y Thule)
- ¿Por qué Posidonio, Marino de Tiro y Tolomeo no utilizaron los datos calculados por Eratóstenes y en su lugar utilizan la correspondencia de 1° a 500 estadios (y no 1° a 700 estadios)?

La riqueza del método de los indicios se demuestra por la amplitud a la que conduce en un trabajo que ofrece una gran cantidad de nuevos conocimientos y promueve el encuentro con la complejidad de la construcción del conocimiento científico e histórico. Se mostró cómo las matemáticas avanzaron para tratar de responder a los problemas reales y la forma en que están arraigadas en los terrenos y las culturas que las expresan.

4.2 Conclusiones didácticas

Hemos mostrado una metodología adecuada para permitir a los estudiantes mostrar su propio cuestionamiento, construir interrogaciones desde lo que pensaban

adquirido y “cierto”, de llegar a ser capaces de plantearse nuevas preguntas, en vez de buscar rápidamente respuestas.

Los estudiantes al final del curso quedan maravillados de que habían pasado tres meses alrededor de una única pregunta. Esto favorece sus habilidades de investigación, sus habilidades para buscar materiales y noticias útiles y complejas, de analizar experiencias con un objetivo preciso y común. Los estudiantes lograron ejercitar estas capacidades además de adquirir los conocimientos del contenido específico del tema de estudio.

Agradecimientos

Las autoras agradecen al Prof. Jorge E. Horvath pela traducción del artículo original en francés.

Referencias

CASATI, R. **La scoperta dell'ombra**. Milano: Mondadori, 2000.

CLEÓMEDES. **De motu circulari corporum caelestium**. Traducción al francés. Teoría básica R. Goulet (Trad.) París: Vrin, 1980.

CLEÓMEDES. **Dos libros sobre la contemplación de las órbitas Celestes**. CASALDERREY, F. M. (Editor); COT, R. (Traducción); BERGASA, J. (Prólogo), Madrid: FESPM (en la prensa).

FONDATION LA MAIN À LA PÂTE. **Sur les pas d'Eratosthène**. Disponible: <<http://www.fondation-lamap.org/fr/eratos>>. Accés: 19 dez. 2016.

GUEDJ, D. **Les cheveux de Bérénice**. París: Seuil, 2003.

LANCIANO, N. Navigare tra il cielo e terra che cos'è la latitudine. In: Convegno UMI-CIIM, 32., 2014. Italy. **Anais...** Italy: UMI-CIIM, 2014. Disponible: <http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2014/10/Lanciano_Navigare-tra-il-cielo-e-la-terra.pdf>. Accés: 10 nov. 2016.

MISURIAMO LA TERRA. Disponible: <http://www.vialattea.net/eratostene/index.php?option=com_content&view=article&id=274&Itemid=167>. Accés: 10 nov. 2016.

PIERRICK AUGER. **mesure de la terre**. [S.l: s.n.]. Disponible: <<https://www.youtube.com/watch?v=eg0GH1eFq6M>>. Accés: 10 nov. 2016.

RUSSO, L. **L'America dimenticata**. Milano: Mondadori, 2013.

RUSSO, L. **La Rivoluzione dimenticata**. Milano: Feltrinelli, 1997.

WIKIPEDIA. **Tropico del Cancro**. [S.l: s.n.], 2016. Disponible: <https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Tropico_del_Cancro&oldid=80079937>. Accés: 10 nov. 2016.

Artigo recebido em 12/07/2016.

Aceito em 06/12/2016.