

## UM NOVO OLHAR PARA O MÉTODO DE PTOLOMEU DE DETERMINAÇÃO DA DISTÂNCIA TERRA-LUA

*Mário Antonio Alves Monteiro*<sup>1</sup>  
*Afonso Holanda de Freitas Freire*<sup>2</sup>  
*Cícero Jailton de Morais Souza*<sup>3</sup>  
*Giselly Alexandre de Souza*<sup>4</sup>  
*Ibson José Maciel Leite*<sup>5</sup>

**Resumo:** Realizamos um estudo para determinação da distância Terra-Lua utilizando o método da passagem da Lua pela direção do zênite, e propomos um ajuste à modelagem matemática desse método que permite a obtenção dessa distância sem considerar, na segunda medida de tempo, que a Lua esteja posicionada exatamente na direção do zênite do observador. Assim como nesse método, consideramos em nossa proposta a aproximação de que a trajetória da Lua em volta da Terra é circular e não levamos em consideração a inclinação do plano orbital da Lua. No entanto, mesmo com estas aproximações, levando-se em consideração os resultados encontrados e os erros obtidos, concluímos que a proposta representa uma melhoria ao método de referência, e ainda que as medidas experimentais foram facilitadas.

**Palavras-chave:** Distância Terra-Lua; Método de Ptolomeu; Zênite do observador.

## UNA NUEVA MIRADA PARA EL MÉTODO DE TOLOMEO DE DETERMINACIÓN DE LA DISTANCIA TIERRA-LUNA

**Resumen:** Se realizó un estudio para determinar la distancia Tierra-Luna usando el método del paso de la Luna por el cenit, y se propuso un ajuste al modelaje matemático de ese método que permite la obtención de esa distancia sin considerar, en la segunda medida del tiempo, que la Luna esté localizada exactamente en la dirección del cenit del observador. Tal como en el método tolomaico, se consideró en nuestra propuesta la aproximación de que la trayectoria de la Luna alrededor de la Tierra es circular, y no se tomó en cuenta la inclinación del plano orbital de la Luna. Sin embargo, aún con estas aproximaciones, y teniendo en cuenta los resultados obtenidos y los errores estimados, concluimos que la propuesta representa una mejora al método de referencia, y que las medidas experimentales resultan facilitadas.

**Palabras clave:** Distancia Tierra-Luna; Método del Tolomeo; Cenit del observador.

## A NEW LOOK TO PTOLEMY'S METHOD FOR DETERMINING THE EARTH-MOON DISTANCE

**Abstract:** We performed a study for determining the Earth-Moon distance utilizing the method of Moon passage through the zenith, and we proposed a refinement to the mathematical modeling of this method that allows obtaining that distance without considering, at the second time measurement, that the Moon is positioned exactly at the observer's zenith direction. As in the original method, we considered in our proposal the approximation that the Moon trajectory around the Earth is circular and we did not take into account the inclination of the Moon's orbital plane. However, even with these approximations, taking into

---

<sup>1</sup> Instituto Federal de Pernambuco, Pesqueira. E-mail: <mariomonteiro@pesqueira.ifpe.edu.br>.

<sup>2</sup> Instituto Federal de Pernambuco, Pesqueira. E-mail: <afonso\_holanda@hotmail.com>.

<sup>3</sup> Instituto Federal de Pernambuco, Pesqueira. E-mail: <cicero.jailton@hotmail.com>.

<sup>4</sup> Instituto Federal de Pernambuco, Pesqueira. E-mail: <gisellydesouza@hotmail.com>.

<sup>5</sup> Instituto Federal de Pernambuco, Pesqueira. E-mail: <ibson.leite@pesqueira.ifpe.edu.br>.

consideration the results found and the errors obtained, we concluded that the proposal represents an improvement to the referring method, and that the experimental measures were facilitated.

**Keywords:** Earth-Moon distance; Ptolemy's Method; Zenith direction.

## 1 Introdução

A origem da Astronomia na Grécia Antiga teve muita influência dos Babilônios, que ainda a utilizavam como uma fonte de presságios divinos. Porém, foram os próprios Gregos os primeiros a tentarem compreender as causas físicas dos movimentos celestes, “começando a separar a ciência da superstição” (RIDPATH, 2008, p.8), tendo como principais objetivos medir o tamanho e a distância dos astros.

Dentre os gregos que mais se preocuparam com os fenômenos celestes é importante citar (CONTADOR, 2008): Tales de Mileto (640 a.C.), Aristóteles (384 a.C.), Eudóxio (séc. IV a.C.), Hiparco (séc. II a.C.), Aristarco de Samos (287 a.C.), Eratóstenes de Cirene (276 a.C.) e Claudio Ptolomeu (150 d.C.). Uma das grandes preocupações em comum desses pensadores dizia respeito à distância entre os astros e às dimensões dos mesmos.

Atualmente, o método mais preciso para medir a distância da Terra à Lua é realizado utilizando-se um laser que lança um feixe de luz em direção a espelhos colocados na Lua pelas missões americanas Apolo (FALLER, 1969, p.99). Esses espelhos refletem a luz em sentido oposto ao emitido pela fonte. Medindo-se o tempo de ida e volta da luz, que é de aproximadamente 2,6 segundos, sabendo-se o valor da velocidade da luz, chega-se ao valor atualmente aceito para a distância média entre a Terra e a Lua, que é de 384.400 km (NASA, 2016). Esta distância varia devido à excentricidade da órbita lunar.

Alguns métodos mais antigos de medição da distância Terra-Lua envolvem a utilização da paralaxe (que embora seja bastante eficaz, há critérios que dificultam sua realização, como realizar observações de pontos sobre a mesma longitude e de latitudes diferentes e conhecidas) e de eclipses. O método de Hiparco (NUSSENZVEIG, 2002), por exemplo, é o mais antigo método de medição da distância Terra-Lua conhecido, e utiliza um eclipse solar e relações geométricas simples.

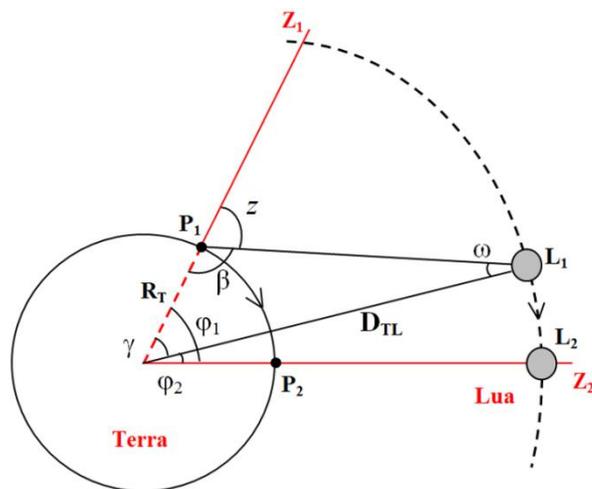
Dentre os métodos de medição da distância Terra-Lua conhecidos, um dos mais simples e de mais fácil reprodução é o Método de Ptolomeu, que é demonstrado e discutido por Contador (2008) e Ávila (1982), e que utiliza a passagem da Lua pela direção do zênite do observador no instante inicial. Esse método utiliza algumas relações trigonométricas, e necessita apenas de algum instrumento de medida angular, tal como astrolábio ou teodolito. Embora simples do ponto de vista instrumental, o método exige que as medições sejam realizadas em determinadas datas e em determinadas posições do globo. As medições só podem ser efetuadas quando o observador se encontra no equador ou em latitudes próximas, uma vez que a Lua só passará na direção do zênite nestes locais. Além disso, devido a inclinação do plano orbital da Lua em relação ao equador terrestre, existirão apenas algumas datas específicas onde a Lua poderá ser encontrada na direção do zênite.

No presente trabalho apresentamos um estudo deste último método citado, onde reproduzimos o importante resultado matemático obtido por ele, ao mesmo tempo

em que propomos incremento ao método, no qual o resultado analítico tende ao que foi encontrado por Ptolomeu no caso específico da Lua encontrar-se na direção do zênite do observador em um dos momentos da medição.

## 2 Medição da distância da Terra-Lua pela passagem da Lua pela direção do zênite do observador

Este método de determinação da distância Terra-Lua considera a aproximação de que a trajetória da Lua em torno da Terra é circular e toma como base um observador situado em um ponto fixo do equador terrestre ou próximo deste (CONTADOR, 2008; ÁVILA, 1982), o qual está representado na Fig. 1 pela posição  $P_1$  com zênite em  $Z_1$ . Essa condição é necessária, pois em altas latitudes a Lua nunca passará pela direção do zênite do observador. Na Fig. 1, o observador enxerga a Lua na posição  $L_1$ . Com o passar do tempo ele nota uma mudança na posição da Lua devido à diferença de velocidade angular da rotação da Terra em relação à revolução da Lua. Após certo tempo de observação, o qual está sendo chamado aqui de  $T_{OB}$ , ele vê a Lua em um novo local (ponto  $L_2$ ) exatamente na nova direção do zênite ( $Z_2$ ), na posição ( $P_2$ ).



**Figura 1** - Esquema geométrico do modelo que utiliza a passagem da Lua pela direção do zênite do observador para determinar a distância Terra-Lua. O polo mostrado na figura é o Polo Sul e o observador se encontra sobre o equador. Os objetos e distâncias não estão em escala.

Com a ajuda de instrumentos de medição angular o observador pode obter o ângulo  $z$  (chamado de distância zenital do astro) entre a direção de seu zênite ( $Z_1$ ) e a posição da Lua ( $L_1$ ) no momento inicial da medida.

O ângulo  $\phi_1$  é produzido devido ao movimento de rotação da Terra, e é obtido pela relação:

$$\frac{T_T}{T_{OB}} = \frac{360^\circ}{\phi_1}$$

Onde  $T_T$  é o período de rotação da Terra. Assim, podemos escrever

$$\varphi_1 = \frac{360^\circ \cdot T_{OB}}{T_T} \quad (1)$$

O ângulo  $\varphi_2$ , produzido devido ao movimento de revolução da Lua, é obtido através de uma relação semelhante, onde o período de revolução da Lua ( $T_L$ ), está para uma revolução completa de  $360^\circ$  assim como o tempo de observação  $T_{OB}$  está para o ângulo  $\varphi_2$ :

$$\frac{T_L}{360^\circ} = \frac{T_{OB}}{\varphi_2}$$

Logo,

$$\varphi_2 = \frac{360^\circ \cdot T_{OB}}{T_L} \quad (2)$$

Observando a Fig. 1 podemos ver que o ângulo  $\beta$  somado ao ângulo  $z$  corresponde a  $180^\circ$ . Logo, podemos dizer que

$$\beta = 180^\circ - z \quad (3)$$

O ângulo  $\gamma$  é dado pela subtração do ângulo  $\varphi_2$  do ângulo  $\varphi_1$ . Assim, das equações (1) e (2) obtém-se

$$\gamma = 360^\circ \cdot T_{OB} \cdot \left( \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_L} \right) \quad (4)$$

Os ângulos  $\omega$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  formam um triângulo. Logo, podemos inferir que

$$\omega = 180^\circ - \beta - \gamma$$

Através das equações (3) e (4), chega-se a

$$\omega = z - (360^\circ \cdot T_{OB}) \cdot \left( \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_L} \right) \quad (5)$$

É importante observar na Eq. 5 que  $\omega$  é dado em termos de grandezas conhecidas ( $T_{OB}$ ,  $T_L$  e  $T_T$ ) e de  $z$ , este último podendo ser medido de forma direta.

Analisando o triângulo formado pelos ângulos  $\omega$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$ , e aplicando a ele a relação dos senos, chega-se à medida da distância Terra-Lua, representada na Fig. 1 por  $D_{TL}$ , como função do raio da Terra ( $R_T$ ), e dos ângulos  $\omega$  e  $\beta$ . Assim, podemos obter  $D_{TL}$  como sendo

$$\frac{\text{sen}\beta}{D_{TL}} = \frac{\text{sen}\omega}{R_T}$$

$$D_{TL} = \frac{\text{sen}\beta \cdot R_T}{\text{sen}\omega}$$

Usando as equações (3) e (5) chega-se a

$$D_{TL} = \frac{\text{sen}(180^\circ - z) \cdot R_T}{\text{sen} \left[ z - (360^\circ \cdot T_{OB}) \cdot \left( \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_L} \right) \right]} \quad (6)$$

A equação (6) representa o resultado analítico para a distância Terra-Lua, utilizando-se o método da passagem da Lua pela direção do zênite de um observador.

### 3 Limitações do método

Esta forma de medir e calcular a distância Terra-Lua é bem simples do ponto de vista teórico, contudo, ela considera situações ideais que não condizem exatamente com o sistema Terra-Lua real.

Este método também possui problemas que estão diretamente relacionados à obtenção de suas medidas. Ele considera a órbita lunar perfeitamente circular e como sendo perpendicular em relação ao eixo de rotação da Terra. Isso, entretanto, não condiz com a realidade, devido à existência de uma inclinação da órbita lunar em relação ao equador da Terra, que varia de 18,4 a 28,7 graus (KEPLER; SARAIVA, 2013). Hoje sabemos que a trajetória da Lua em torno da Terra é elíptica, apresentando uma variação de aproximadamente 6,67 raios terrestres (42.522 km) do perigeu (ponto onde a Lua está mais próxima da Terra) ao apogeu (ponto onde a Lua está mais distante da Terra).

Um outro fator que influencia os dados obtidos nas medidas surge devido ao desvio causado pela refração atmosférica, que é o desvio aparente do ângulo vertical do astro (BASÍLIO; ADRIANO, 2005) causado pela mudança na direção da propagação da luz ao mudar de um meio para outro (vácuo para atmosfera) quando a incidência não é normal ao dioptra, produzindo uma imagem aparente localizada em uma posição distinta da posição real do astro. O desvio na posição angular do astro causado pela refração é menor a medida que o astro se aproxima da direção do zênite do observador, se tornando nulo exatamente na direção do zênite. Quando o astro se encontra longe da direção do zênite os efeitos da refração são mais significativos, porém os efeitos causados pelas aproximações do método são ainda mais relevantes.

Utilizando o método da passagem da Lua pela direção do zênite, o observador depende do momento exato em que a Lua passa por esta direção para poder realizar as medições. Este fator é mais uma restrição do método.

A Lua não passa na direção do zênite apenas para um observador estando sob o equador, mas também em outros paralelos terrestres devido à inclinação de sua órbita com relação ao plano do equador terrestre. Esta mesma inclinação traz um novo dado que pode influenciar no método, que é a variação do ângulo azimutal da Lua enquanto ela percorre o céu, fato este que também é desconsiderado.

Diante desses aspectos e com o intuito de superar a limitação da Lua ter que estar situada na direção do Zênite na segunda medida, propomos um ajuste ao método que considera um ângulo diferente de zero com a direção do Zênite no segundo instante da medição.

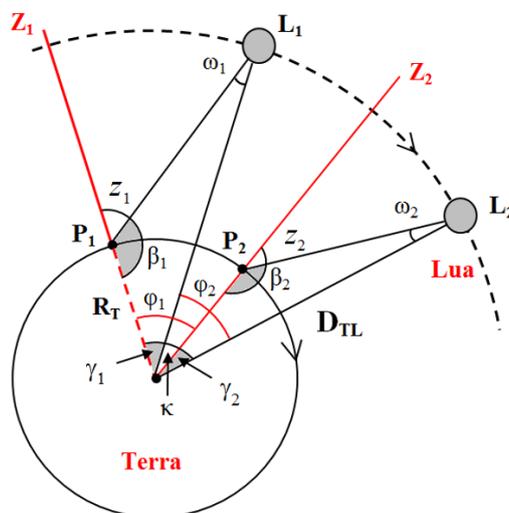
#### 4 Ajuste ao método da passagem da Lua pela direção do zênite

Apresentamos uma proposição com o intuito de minimizar uma das limitações anteriormente citadas, em relação ao método da passagem da Lua pela direção do zênite.

Nossa proposta proporciona resultados satisfatórios tanto quando a Lua passa pela direção do zênite do observador ou quando passa bem próximo do mesmo, exatamente da mesma forma que o método de Ptolomeu. No entanto, nossa alternativa ainda possibilita que se utilizem quaisquer dois ângulos verticais, precisando saber apenas o intervalo de tempo que se passou entre as medições dos mesmos, podendo-se, assim, efetuar as medidas sem esperar que a Lua esteja situada exatamente sobre a direção do zênite do observador no segundo instante da medida. É importante ressaltar que, assim como o método tomado como base, nosso incremento necessita das mesmas condições idealizadas da órbita circular da Lua e desconsidera a inclinação do plano orbital da Lua, com a diferença de que não é mais necessário saber exatamente em que momento a Lua passa pela direção do zênite. Porém, continua sendo necessário saber que na data específica da medição ela passará pela direção do zênite do observador.

No método original é necessário esperar que a Lua esteja na direção do zênite do observador e saber o intervalo de tempo entre este acontecimento e a medida do ângulo de observação. Assim, caso exista algum erro na determinação da posição exata da Lua no céu, o resultado obtido carregará um erro significativo. Nossa consideração reduz esse efeito e possibilita uma abordagem de realizar medidas mais abrangentes.

Nossa proposta consiste em adequar o modelo da Fig. 1 para um modelo que considera outro instante onde a Lua está fora da direção do zênite, com a proposição de dois ângulos  $z$  ao invés de apenas um; dois ângulos  $\beta$ ; dois ângulos  $\varphi$ ; dois ângulos  $\gamma$ ; dois ângulos  $\omega$ ; e um novo ângulo  $\kappa$ . A Fig. 2 mostra o diagrama esquemático desse modelo.



**Figura 2** - Diagrama esquemático para um ajuste ao Método de Ptolomeu para o cálculo da distância Terra-Lua. O polo mostrado na figura é o Polo Sul e o observador se encontra sobre o equador. Os objetos e distâncias não estão em escala.

Na Fig. 2,  $D_{TL}$  representa a distância da Terra à Lua;  $R_T$  é o raio da Terra;  $z_1$  e  $z_2$  representam distâncias zenitais da Lua em relação às direções dos zênites do observador

nos instantes  $T_1$  e  $T_2$ , medidos; os ângulos  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são suplementares aos ângulos  $z_1$  e  $z_2$ , formados através da posição da Lua e do centro da Terra em relação ao ponto do observador; os ângulos  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , são respectivamente o ângulo horário formado pela rotação da Terra e o ângulo horário formado pela revolução da Lua;  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  correspondem aos ângulos formados entre as direções da Lua e as direções do zênite do observador em relação ao centro da Terra;  $\omega_1$  e  $\omega_2$  correspondem aos ângulos formados entre o ponto onde se encontra o observador e o centro da Terra em relação à Lua; e  $\kappa$  é o ângulo formado entre a primeira posição da Lua no céu e o zênite do observador na segunda posição.

Analisando a Fig. 2 temos:

$$\beta_1 = 180^\circ - z_1 \quad (7)$$

$$\beta_2 = 180^\circ - z_2 \quad (8)$$

Os ângulos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  estão ambos relacionados a  $D_{TL}$  e aos respectivos arcos  $L_1Z_1$  e  $L_2Z_2$ . Além disso, esses arcos também estão relacionados aos ângulos  $z_1$  e  $z_2$ .

Considerando a aproximação mostrada na Fig. 3, na qual a trajetória da órbita lunar em torno da Terra pode ser representada por meio de uma circunferência e desconsiderando a inclinação da órbita da Lua em relação ao equador da terrestre, o ângulo  $z_1$  é excêntrico interior (ângulo interno à circunferência da órbita lunar cujo vértice não coincide com o centro da mesma), enquanto o ângulo  $\gamma_1$  é central (cujo vértice está no interior da circunferência da órbita lunar e coincide com o centro da mesma). Os ângulos  $z_2$  e  $\gamma_2$  não estão representados na Fig. 3, no entanto, por analogia, podemos dizer que  $z_2$  é excêntrico interior e  $\gamma_2$  é central. Todo ângulo excêntrico interior pode ser escrito como a média aritmética das medidas angulares dos dois arcos que ele determina. Dessa forma,  $z_1$  será:

$$z_1 = \frac{m(L_1Z_1) + m(L'_1Z'_1)}{2} \quad (9)$$

Onde  $m(L_1Z_1)$  e  $m(L'_1Z'_1)$  representam as medidas angulares dos arcos  $L_1Z_1$  e  $L'_1Z'_1$ , respectivamente. Os pontos  $L'_1$  e  $Z'_1$  são os pontos opostos a  $L_1$  e  $Z_1$ , respectivamente, em relação ao ponto  $P_1$ .

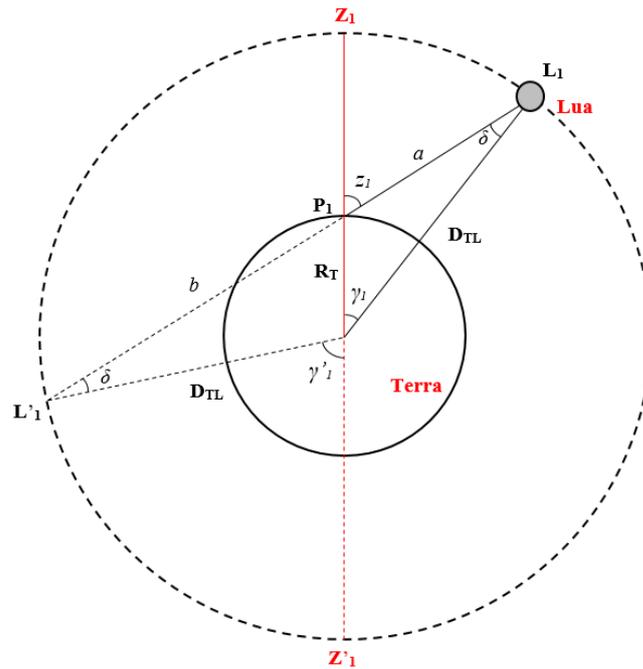
As medidas angulares  $m(L_1Z_1)$  e  $m(L'_1Z'_1)$  correspondem aos ângulos centrais, ou seja:

$$m(L_1Z_1) = \gamma_1 \quad (10)$$

$$m(L'_1Z'_1) = \gamma'_1 \quad (11)$$

Onde  $\gamma'_1$  é o ângulo formado entre os pontos  $L'_1$  e  $Z'_1$  em relação ao centro da circunferência. Dessa maneira, a partir das equações (9), (10) e (11), podemos escrever a distância angular zenital como:

$$z_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma'_1}{2} \quad (12)$$



**Figura 3** – Diagrama esquemático do sistema Terra-Lua, explicitando os ângulos excêntricos internos. Os objetos e distâncias não estão em escala.

Utilizando a lei dos senos para os dois triângulos mostrados na Fig. 3, teremos:

$$\frac{b}{\text{sen}(180^\circ - \gamma'_1)} = \frac{R_T}{\text{sen}\delta}$$

$$\frac{a}{\text{sen}\gamma_1} = \frac{R_T}{\text{sen}\delta}$$

Logo,

$$\frac{b}{\text{sen}(180^\circ - \gamma'_1)} = \frac{a}{\text{sen}\gamma_1} \quad (13)$$

Onde  $a$  e  $b$  representam, respectivamente, a distância do ponto  $P_1$  até a posição  $L_1$  e a distância do ponto  $P_1$  até a posição  $L'_1$ . Como  $\text{sen}(180^\circ - \gamma'_1) = \text{sen}\gamma'_1$ , logo:

$$\text{sen}\gamma'_1 = \frac{b}{a} \text{sen}\gamma_1$$

$$\gamma'_1 = \arcsen\left(\frac{b}{a} \text{sen}\gamma_1\right) \quad (14)$$

Substituindo a equação (14) na equação (12), obtemos a relação entre os ângulos  $z_1$  e  $\gamma_1$ :

$$\frac{z_1}{\gamma_1} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\gamma_1} \cdot \arcsen\left(\frac{b}{a} \text{sen}\gamma_1\right) \right] \quad (15)$$

Para estimarmos matematicamente o valor da relação  $b/a$  basta ver que  $a$  varia de  $D_{TL} - R_T$  até  $D_{TL} + R_T$ , e o mesmo pode ser dito para o valor de  $b$ , sendo que, quando um deles tem valor máximo o outro tem valor mínimo. Então,

$$\frac{D_{TL} - R_T}{D_{TL} + R_T} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{D_{TL} + R_T}{D_{TL} - R_T} \quad (16)$$

Considerando que a distância média da Terra à Lua é aproximadamente 60 vezes o raio médio da Terra (HALLIDAY, RESNICK, WALKER, 2009), os limites da relação (16) podem ser escritos:

$$0,9672 \leq \frac{b}{a} \leq 1,0339 \quad (17)$$

Conforme  $\gamma_I$  diminui, isto é, a Lua se aproxima da direção do zênite, o valor do  $\text{sen } \gamma_I$  também diminui, já a relação  $b/a$  aumenta, pois  $b$  tende ao seu valor máximo enquanto  $a$  tende ao seu valor mínimo. Ao contrário, se  $\gamma_I$  aumenta (a Lua se afasta da direção do zênite), o valor do  $\text{sen } \gamma_I$  também aumenta, enquanto que, a relação  $b/a$  diminui.

A relação a seguir pode ser obtida simulando-se a Eq. (15) para os casos de  $\gamma_I$  cada vez mais próximos de zero ( $b/a \rightarrow 1,0339$ ), ou seja, para ângulos pequenos e próximos de zero o resultado de  $z_I / \gamma_I$  tende para 1,017:

$$\frac{z_1}{\gamma_1} \cong 1,017 \quad (18)$$

E para  $\gamma_I$  se aproximando de  $90^\circ$  ( $b/a \rightarrow 1,00$ ), obtém-se que:

$$\frac{z_1}{\gamma_1} \cong 1,000 \quad (19)$$

Assim, concluímos que tanto para pequenos valores de  $\gamma_I$  quanto para valores maiores e próximos a  $90^\circ$  a relação entre  $z_I / \gamma_I$  tendem ao mesmo valor.

Realizando o procedimento acima para os ângulos  $z_2$  e  $\gamma_2$ , chega-se às mesmas relações mostradas nas Eqs. (18) e (19) para  $z_2$  e  $\gamma_2$ . Desta feita, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{\gamma_1} &\cong \frac{z_2}{\gamma_2} \\ \gamma_2 &\cong \frac{z_2 \cdot \gamma_1}{z_1} \end{aligned} \quad (20)$$

Apesar da Eq. (17) ter sido obtida considerando-se os limites matemáticos máximo e mínimo para  $a$  e  $b$ , isto é, para os casos dos ângulos variando de  $0$  a  $180^\circ$ , fisicamente isso não é possível devido às limitações de medição impostas pelo limite do horizonte. Portanto, para o modelo estudado, em que a distância Terra-Lua é muito maior do que o diâmetro da Terra, podemos afirmar que o procedimento acima e a Eq. (20) são válidos para ângulos entre  $0$  e  $90^\circ$ .

Voltemos agora a análise da Fig. 2. Utilizando a relação dos senos obtemos:

$$\frac{\text{sen}\beta_1}{D_{TL}} = \frac{\text{sen}\omega_1}{R_T} \quad (21)$$

$$\frac{\text{sen}\beta_2}{D_{TL}} = \frac{\text{sen}\omega_2}{R_T} \quad (22)$$

Ainda da Fig. 2, podemos ver que:

$$\kappa = \varphi_2 - \gamma_2 \quad (23)$$

$$\gamma_1 = \varphi_1 - \kappa \quad (24)$$

Logo, das equações (23) e (24), temos:

$$\gamma_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \gamma_2$$

Substituindo na equação (20) obtemos

$$\gamma_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \left( \frac{z_2}{z_1} \cdot \gamma_1 \right)$$

Logo,

$$\gamma_1 = \frac{z_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}{z_1 - z_2} \quad (25)$$

Da Fig. 2 podemos ver que  $\omega_1$ ,  $\beta_1$  e  $\gamma_1$  são os ângulos internos de um triângulo. Portanto,

$$\omega_1 = 180^\circ - \beta_1 - \gamma_1 \quad (26)$$

Substituindo a equação (7) e a equação (25) na equação (26), ficamos com:

$$\omega_1 = z_1 \cdot \left[ 1 - \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{z_1 - z_2} \right] \quad (27)$$

Como já foi dito anteriormente, os ângulos  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são ângulos horários, que podem ser representados através das expressões:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{360 \cdot T_{OB}}{T_T} \\ \varphi_2 = \frac{360 \cdot T_{OB}}{T_L} \end{cases}$$

Onde,  $T_{OB}$  equivale ao período de observação, ou seja, é o intervalo de tempo entre a medida do primeiro e do segundo ângulo  $z$ ;  $T_T$  e  $T_L$  representam respectivamente o período de rotação da Terra e o período de revolução da Lua. Assim, é possível dizer que a diferença entre esses ângulos é igual a:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 360 \cdot T_{OB} \cdot \left( \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_L} \right) \quad (28)$$

Da equação (21), temos:

$$D_{TL} = \frac{\text{sen}\beta_1 \cdot R_T}{\text{sen}\omega_1} \quad (29)$$

Substituindo as equações (7), (27) e (28) na equação (29), obtemos:

$$D_{TL} = \frac{\text{sen}(180^\circ - z_1) \cdot R_T}{\text{sen} \left\{ z_1 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{360 \cdot T_{OB}}{z_1 - z_2} \right) \cdot \left( \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_L} \right) \right] \right\}} \quad (30)$$

Esta equação é capaz de determinar a distância Terra-Lua de uma forma mais prática do ponto de vista experimental, uma vez que as medidas de  $z_1$  e  $z_2$  são obtidas sem considerar a Lua na direção do zênite.

No limite de  $z_2$  tendendo à zero, a equação (30) torna-se a mesma obtida no método da passagem da Lua pela direção do zênite, aqui representada pela Eq. (6).

## 5 Resultados obtidos

Realizamos 25 horas de observações da Lua, dentro das instalações do *Campus* Pesqueira, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco. Neste intervalo de tempo foram escolhidos alguns momentos especiais do posicionamento da Lua na esfera celeste. Um desses momentos de observação se deu durante um eclipse lunar, momento em que a Lua se encontrava muito próxima à eclíptica (dado obtido através do *software Stellarium*). Em outro momento, foram realizadas observações devido ao fato de a posição da Lua no céu estar sobre o paralelo celeste correspondente ao paralelo local.

Utilizou-se como recurso instrumental o teodolito digital da instituição, uma Estação Total *Eletronic Theodolite* T200, ferramenta de medição dos ângulos horizontais e verticais. Além disso, foram utilizados os *softwares Stellarium, Sky Chart* e *CyberSky 4*, que possibilitaram conhecer a posição e a trajetória da Lua nos dias de observação.

Para a obtenção dos resultados consideramos  $R_T = 6,37 \times 10^6$  m,  $T_T = 23$  h 56 min e  $T_L = 27,3$  dias (HALLIDAY, RESNICK, WALKER, 2009).

O melhor resultado obtido para a distância Terra-Lua foi de  $3,65 \times 10^8$  m, ou  $57,32 R_T$ , enquanto que o resultado fornecido pelo *software Stellarium* para as mesmas condições foi de  $3,705 \times 10^8$  m. Isso significa um resultado com uma diferença de menos de 1 %. Apesar de terem sido realizadas 25 horas de observação, para a obtenção dos resultados o tempo de observação considerado foi de aproximadamente 10 horas, pois uma das medidas foi realizada antes da culminação enquanto a outra foi realizada depois da culminação.

## 6 Conclusões

Realizamos um estudo sobre o método da passagem da Lua pela direção do zênite para determinação da distância Terra-Lua e verificamos que o fato de esperar que a Lua se posicione exatamente na direção do zênite do observador no segundo instante da medida de posição da Lua constitui uma limitação a este método. Limitação esta que pode trazer, além de dificuldades nas medidas, um erro relativo, uma vez que, obtida

uma falha na determinação do zênite no segundo instante, o erro na distância final calculada é propagado.

A proposta que apresentamos neste artigo representa uma ferramenta matemática adicional que torna o método de determinação da distância Terra-Lua mais geral, pois, ao utilizá-lo, o observador não precisa esperar que a Lua se posicione exatamente na direção do zênite para realizar suas medidas. Em nosso modelo a Lua pode estar em posições angulares em relação às direções dos zênites do observador nos instantes  $T_1$  e  $T_2$  formando ângulos correspondidos entre 0 e  $90^\circ$ .

É importante ressaltar que, no limite de  $z_2$  tendendo à zero, a Eq. (30) torna-se a mesma obtida no método da passagem pela direção do zênite para determinação da distância Terra-Lua, dada pela Eq. (6). Isso significa que a equação da passagem pela direção do zênite pode ser obtida no caso particular da Lua estar passando exatamente pela direção do zênite do observador no segundo instante da medida ( $z_2 = 0$ ).

Comparando-se os resultados obtidos através da nossa proposta com os valores mostrados pelos softwares e os valores atualmente conhecidos, podemos observar uma excelente confiabilidade, uma vez que os erros percentuais que obtivemos foram pequenos.

## Agradecimentos

Ao Instituto Federal de Pernambuco pelo apoio financeiro ao Clube de Astronomia Vega.

## Referências

- ÁVILA, G. A geometria e as distâncias na Grécia Antiga. **Revista do professor de Matemática**, v.1, n.1, 1982.
- BASÍLIO, S.; ADRIANO S. **Astronomia geodésica, posicionamento pelas estrelas**, 2005.
- CONTADOR, P. R. M. A Idade Áurea e o declínio grego. In: CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2008. v.1, p.377-410.
- FALLER, J. E. I.; WINER, W.; CARRION, T. S.; JOHNSON, P.; SPADIN, L.; ROBINSON, E. J.; WAMPLER, D. Laser beam directed at the lunar retro-reflector array: observations of the first returns. **Science**, v.166, p.99-102, 1969.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 2.
- KEPLER, S. O.; SARAIVA, M. F. O. **Astronomia e astrofísica**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION (NASA). **Solar System Exploration; Earth's Moon: Facts & Figures**. Disponível em: <<http://solarsystem.nasa.gov>>. Acesso em: 20 dez. 2016.

NETO, G. B. L. **Astronomia de Posição**: notas de aula. Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas (IAG), Universidade de São Paulo (USP), 2010. <<http://www.astro.iag.usp.br/~gastao/astroposicao.html>> Acesso em: 17 dez. 2016.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. 4. ed. São Paulo: Blucher, 2002. v.1.

RIDPATH, I. Primórdios da Astronomia. In: RIDPATH, I. **Guia ilustrado Zahar Astronomia**. 2. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, p.16-21, 2008.