



VIAGEM À LUA: UMA PROPOSTA PARA ABORDAR O ENSINO DE VIAGENS ESPACIAIS EM SALA DE AULA

Joyce Machado Oliveira ¹
João Henrique Rodrigues ²

RESUMO: A viagem à Lua recobrou o seu destaque nas mídias sociais e nos meios de comunicação nos últimos anos graças aos avanços da empresa SpaceX. Em busca de uma forma de conectar os tópicos de Astronomia ensinados na Base Nacional Comum Curricular no Brasil e a realidade científica atual, e contribuir para a divulgação científica, o presente trabalho visa adaptar a Física envolvida em voos espaciais, permitindo uma abordagem mais viável em salas de aula do Ensino Médio. Inicialmente, utilizou-se a viagem à Lua e os conceitos de Movimento Retilíneo e Circular Uniforme, bem como a Lei da Gravitação Universal, para analisar a aceleração que ocorre no foguete ao longo da viagem Terra-Lua e analisou a quantidade aproximada de energia necessária para atingir a Lua. Investigou-se os pontos de lançamento que permitiriam a economia de energia e, conseqüentemente, de combustível. Foram utilizados os conceitos de variação de posição angular para calcular os pontos de partida e chegada do foguete durante a viagem Terra-Marte. Por fim, foram investigados os desafios técnicos e logísticos envolvidos na viagem a Marte, bem como o uso de simulações para abordar questões mais abstratas.

PALAVRAS-CHAVE: Viagem à Lua; Ensino de Física; Propostas didáticas.

VIAJE A LUNA: UNA PROPUESTA PARA ABORDAR LA ENSEÑANZA DEL VIAJE ESPACIAL EN EL AULA

RESUMEN: El viaje a la Luna ha recuperado protagonismo en las redes sociales y en los medios de comunicación en los últimos años gracias a los avances de la empresa SpaceX. En busca de una forma de conectar los recursos de Astronomía impartidos en la Base Curricular Común Nacional en Brasil y la realidad científica actual, y contribuir a la divulgación científica, el presente trabajo tiene como objetivo adaptar la Física proyectada en los vuelos espaciales, permitiendo una comprensión más enfoque viable en las aulas de secundaria. Inicialmente, utilicé el viaje a la Luna y los conceptos de Movimiento Rectilíneo Uniforme y Circular, así como la Ley de Gravitación Universal, para analizar la interferencia que se produce en el cohete durante el viaje Tierra-Luna y ver el aproximado cantidad de energía necesaria para llegar a la luna. Se investigaron los puntos de lanzamiento que permitirían el ahorro de energía y, en consecuencia, el ahorro de combustible. Los conceptos de variación de la

¹ Instituto Federal de Minas Gerais, Bambuí, Brasil. E-mail: joycemachado7070@gmail.com

² Instituto Federal de Minas Gerais, Bambuí, Brasil. E-mail: joao.henrique@ifmg.edu.br

posición angular se utilizaron para calcular los puntos de partida y llegada del cohete durante el viaje Tierra-Marte. Finalmente, se investigaron los desafíos técnicos y logísticos que implica en el deseado viaje a Marte, así como el uso de simulaciones para abordar cuestiones más abstractas.

PALABRAS CLAVE: Viaje a Luna; Enseñanza de la Física; Propuestas didácticas.

JOURNEY TO THE MOON: A PROPOSAL TO APPROACH THE TEACHING OF SPACE TRAVEL IN THE CLASSROOM

ABSTRACT: *The journey to the Moon has regained its prominence on social media and in the media in recent years thanks to advances made by the company SpaceX. In search of a way to connect the topics of Astronomy taught in the National Common Curricular Base in Brazil and the current scientific reality, and to contribute to scientific dissemination, the present work aims to adapt the Physics involved in space flights, allowing a more viable approach in high school classrooms. Initially, the trip to the Moon and the concepts of Rectilinear and Uniform Circular Motion, as well as the Law of Universal Gravitation, were used to analyze the acceleration that occurs in the rocket during the Earth-Moon trip and analyzed the approximate amount of energy needed to reach the moon, along with the launch points that would allow energy savings and, consequently, fuel savings were investigated. The concepts of angular position variation were used to calculate the departure and arrival points of the rocket during the Earth-Mars journey. Finally, the technical and logistical challenges involved in traveling to Mars were investigated, as well as the use of simulations to address more abstract questions.*

KEYWORDS: *Journey to the Moon; Physics teaching; Didactic Proposals.*

INTRODUÇÃO

“Este foi um pequeno passo para o homem, mas um gigantesco salto para a humanidade.” Foram estas palavras, proferidas por Neil Armstrong, primeiro ser humano a pisar na superfície lunar, que marcaram a corrida espacial da década de 1960, em 20 de julho de 1969. O programa Apollo, responsável por levar os astronautas até a Lua e trazê-los de volta à Terra sãos e salvos foi, de fato, um grande salto para a humanidade. Tal como apontado por Macau (2007) “o programa (...) foi um fabuloso empreendimento de engenharia, que envolveu durante uma década cerca de 40.000 pessoas num minucioso trabalho coordenado entre indústrias, universidades e centros de pesquisas.”.

No entanto, antes mesmo do surgimento das missões Apollo, diversas iniciativas feitas pela NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) já pretendiam trabalhar no desenvolvimento de equipamentos tecnológicos que seriam essenciais para que o ser humano conseguisse chegar à Lua. O Projeto Mercury (*National Aeronautics and Space Administration* [NASA] 2006), criado pela agência norte-americana no final da década de 1950, por exemplo, tinha como objetivo corrigir falhas nos primeiros foguetes projetados por Robert Goddard, e criar um sistema seguro e eficiente para enviar as tripulações até o satélite natural do planeta Terra. Tal projeto foi bem-sucedido em sua missão, tendo sua primeira glória com “o voo orbital de John Glenn a bordo da espaçonave Mercury, ‘Amizade 7’”, como aponta o historiador

James M. Grimwood no artigo “*Project Mercury: A Chronology*”, publicado pela NASA em 1963. Ainda nas palavras de Grimwood (1963):

Desde o início, o trabalho estava sendo realizado em todos os componentes da espaçonave, adaptando os veículos de lançamento, preparando a rede mundial de rastreamento, selecionando e treinando astronautas e desenvolvendo equipamentos de suporte terrestre para verificação de sistemas e treinamento de astronautas. (tradução nossa)

O sucessor do Projeto Mercury foi o denominado Projeto Gemini, que trabalharia no aprimoramento dos equipamentos e preparou a NASA para o que seria o Programa Apollo, responsável por definitivamente levar o ser humano à Lua. Segundo o site oficial da NASA, “as missões do projeto Gemini ocorreram de 1965 à 1966, entre os projetos Mercury e Apollo, e consistiram em dez tripulações, com dois homens em cada uma.” E em 1969 a missão Apollo 11 levou três astronautas para a Lua (National Aeronautics and Space Administration [NASA] 2019).

Atualmente, algumas agências espaciais - incluindo a NASA, a SpaceX e a ISRO - estão desenvolvendo novas missões para a Lua. De acordo com o site oficial da agência indiana (Indian Space Research Organization [ISRO] 2023), a Missão Chandrayaan-3 realizou um pouso bem sucedido na Lua do dia 23 de agosto de 2023. Já a agência SpaceX trabalha em diversos projetos voltados para a exploração lunar e também para viagens a Marte. A agência trabalha atualmente no aprimoramento de seus foguetes, segundo o site oficial da SpaceX (n.d):

A Starship e o foguete Super Heavy representam um sistema de transporte totalmente reutilizável projetado para transportar tripulação e carga para a órbita da Terra, Lua, Marte e além. Starship é o veículo de lançamento mais poderoso já desenvolvido no mundo, capaz de transportar até 150 toneladas métricas totalmente reutilizáveis e 250 toneladas métricas descartáveis. (tradução nossa)

A agência pretende realizar voos interplanetários com até 100 tripulantes passageiros, realizar o lançamento de satélites e o desenvolver de uma base lunar. Seu projeto denominado *dearMoon*, segundo o site oficial da agência (Project dearMoon n.d.), pretende levar de 10 a 11 passageiros em uma trajetória circunlunar, que sairá da Terra e dará a volta em torno da Lua, retornando à Terra utilizando apenas a gravidade do planeta. Ainda não há datas oficiais de lançamento para nenhum projeto da agência.

Ao falar de viagens espaciais, pode surgir o questionamento do porquê não há missões voltadas para o pouso ou a exploração de planetas como Mercúrio, Vênus e até mesmo Júpiter e Saturno. Para esclarecer este questionamento, é necessário considerar as condições físicas e geofísicas dos planetas no Sistema Solar.

O planeta Vênus, segundo em órbita solar, apesar de estar bem mais próximo orbitalmente à Terra e também ser um planeta rochoso, possui um ambiente pouco favorável para qualquer

ser humano, dado que “a atmosfera é composta principalmente de dióxido de carbono — o mesmo gás que causa o efeito estufa em Vênus e na Terra — com nuvens compostas de ácido sulfúrico.” (National Aeronautics and Space Administration [NASA] n.d.a)³.

O planeta Mercúrio poderia entrar nas indagações de outra parcela da população, já que é o primeiro planeta em órbita solar (vale lembrar que a Terra é o terceiro). No entanto, apesar de ter uma aparência que se assemelha com a da Lua, com crateras formadas por colisões com asteroides, seu ambiente também é hostil para os seres humanos, já que o planeta não possui uma atmosfera e suas temperaturas na superfície oscilam de maneira extrema, como aponta o site oficial da NASA (National Aeronautics and Space Administration [NASA] n.d.b)³:

As temperaturas em Mercúrio são extremas. Durante o dia, as temperaturas na superfície podem chegar a 800 graus Fahrenheit (430 graus Celsius). Como o planeta não tem atmosfera para reter esse calor, as temperaturas noturnas na superfície podem cair para 290 graus Fahrenheit negativos (180 graus Celsius negativos). (tradução nossa).

Já os planetas jovianos (ou gasosos), se tornam inviáveis devido a sua grande distância da Terra (Júpiter, por exemplo, no seu ponto mais próximo da Terra, está a uma distância de aproximadamente 590 milhões de quilômetros). Outro fator é a superfície que, em gigantes gasosos como Júpiter e Saturno, tende a ser inexistente. De acordo com o site oficial da NASA (National Aeronautics and Space Administration [NASA] n.d.c)³:

Como um gigante gasoso, Júpiter não tem uma superfície verdadeira. O planeta é formado principalmente por gases e líquidos em turbilhão. Enquanto uma espaçonave não teria onde pousar em Júpiter, ela também não seria capaz de voar ilesa. As pressões e temperaturas extremas no interior do planeta esmagam, derretem e vaporizam naves espaciais que tentam voar para o planeta. (tradução nossa)

O mesmo se estende para Saturno e para os gigantes gelados, Urano e Netuno.

Considerando estes fatores, o vizinho vermelho da Terra se torna o alvo perfeito para uma exploração espacial. Marte é o quarto planeta em órbita solar e o planeta com maiores semelhanças geofísicas com a Terra. Nas palavras de Mark Buchanan, físico estadunidense (Buchanan 2017):

Primeiramente, (Marte) não está muito distante e é muito mais hospitaleiro que outras alternativas como Vênus e Mercúrio. O dia marciano tem 24 horas e 40 minutos, e suas temperaturas variam de -140°C a 30°C, comparado à temperatura um pouco mais quente da Terra, que varia de -88°C a 58°C. (tradução nossa)

³ As características dos planetas podem também ser encontradas no livro “ABCD da Astronomia e Astrofísica” (Horvath 2008). Optamos por colocar as referências do site da NASA.

Logo, Marte é o planeta mais amigável para uma viagem. Stinner e Begoray (2005) discutem um pouco a respeito da história por trás do fascínio por Marte e completam “(desde de 1975) a NASA tem explorado o planeta em busca de dados científicos”. Porém, os desafios para chegar até lá são muito complexos. Como cita a Revista Superinteressante de 2011 (Superinteressante 2011), em uma edição especial sobre as conquistas espaciais, “se os cientistas tivessem de eleger o maior desafio tecnológico para a 1.^a metade do século XXI, ele dificilmente fugiria disso: uma viagem tripulada para Marte.”

Há diversos fatores que devem ser considerados ao cogitar e planejar uma viagem ao planeta. O primeiro deles é a dificuldade tecnológica que os pesquisadores devem superar. Entre estas, aponta-se a radiação do espaço profundo. Deixar a Terra significa, basicamente, deixar a proteção da Magnetosfera do planeta para trás e entrar em espaços cujas fontes de radiação, como o Sol e até mesmo raios cósmicos, podem penetrar uma imensa diversidade de materiais, incluindo a pele humana. Como aponta Boice (2017), “a radiação cósmica é um fator importante e potencial limitante na ida para Marte.” Portanto, quando o ser humano eventualmente embarcar em viagens de meses e até mesmo anos nesse tipo de ambiente, o nível de radiação ao qual a tripulação estará exposta será muito maior do que a radiação experienciada aqui na Terra.

Outro fator é construir um foguete que leve e preserve suprimentos (como água, comida e remédios) para duas viagens de 6 à 9 meses mais a estadia de dois anos em solo marciano. De acordo com o site Tua Saúde (Zanin 2023a, 2023b), a Organização Mundial de Saúde aponta que um homem entre 30 à 55 anos com 70 kg que pratica atividades físicas leves (trabalhar sentado e caminhar até 1 km por dia) precisa consumir, em média, 2,6 kcal em alimentos e beber 2,4 litros de água diariamente, e uma mulher com estas mesmas características precisa consumir, em média, 2,2 kcal em alimentos e beber a mesma quantidade de água diariamente. Se a viagem tripulada a Marte levar os seus alimentos em barras energéticas de proteína (uma forma bem compacta e leve), estima-se que cada pessoa se alimenta, em média, por 14 barras de 171cal em cada dia, cada uma pesando 40g. Logo, seriam necessários levar 4913 barras energéticas para alimentar uma pessoa durante um ano, as quais pesam 196.52 kg no total. A quantidade de água, por outro lado, não sabemos estipular, uma vez que o foguete pode ter um sistema projetado para reaproveitamento de água. Ao considerar a quantidade de carga apontada acima, vê-se que o foguete precisa ser maior do que aquele tripulado para a Lua para conseguir caber e levar uma maior quantidade de suprimentos, e ele seria, por consequência, mais pesado, o que precisaria de gastar uma quantidade maior de energia/combustível para tirá-lo da Terra e enviá-lo para Marte (retomaremos esse assunto mais adiante); entre outros.

De acordo com previsões feitas por cientistas e pesquisadores da agência espacial norte-americana, com a tecnologia que se tem disponível agora seria possível enviar uma espaçonave tripulada para o vizinho vermelho entre 2030 e 2040.

Além das limitações tecnológicas, a distância entre Terra e Marte é também um motivo preocupante. A distância média entre esses planetas é de, aproximadamente, 228 milhões de quilômetros, podendo chegar a um mínimo de 58 milhões de quilômetros. Em seu artigo,

Ornes (2018) aponta que “décadas antes do primeiro lançamento de uma sonda ao espaço, Wather Hohmann calculou a trajetória mais eficiente em parâmetros de energia entre duas órbitas circulares [...]”. Por esta, calcula-se que a viagem da Terra até Marte levaria 8,5 meses, e as posições angulares da Terra e de Marte no lançamento seriam de, respectivamente, 0° e 44° , e o foguete chegaria ao seu destino quando Marte estivesse na posição angular de 180° , assim como apontado na figura abaixo, fora de escala (Figura 1). As expressões “Earth at launch”, “Mars at launch” e “Mars at arrival” significam, respectivamente, “Terra no lançamento”, “Marte no lançamento” e “Marte na chegada”. O disco em azul representa a Terra, o disco em vermelho representa Marte, o disco em amarelo representa o Sol e o objeto em cinza representa um satélite.

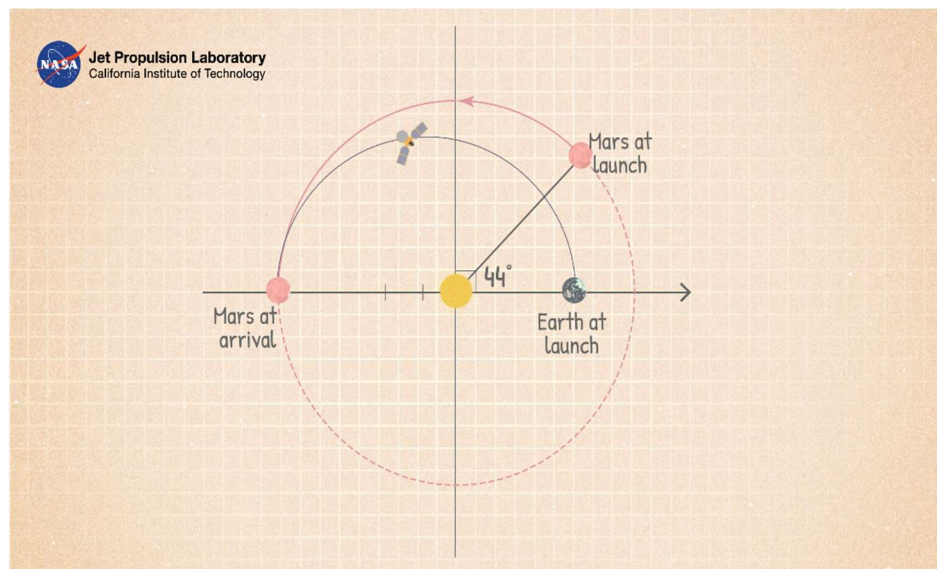


Figura 1 – Trajetória de lançamento Hohmann da Terra para Marte.

Fonte: *Jet Propulsion Laboratory*, 2016. Disponível em:

<https://www.jpl.nasa.gov/edu/teach/activity/lets-go-to-mars-calculating-launch-windows/>. Acesso em: 01 dez. 2022.

De acordo com o site oficial da Missão Perseverance (Figueiredo 2021, National Aeronautics and Space Administration [NASA] 2020), o primeiro pouso bem sucedido em Marte ocorreu pela sonda não tripulada *Perseverance* em 18 de fevereiro de 2021, levando 6 meses e 19 dias para realizar a sua viagem. Para uma breve comparação de tempo, os astronautas Neil Armstrong, Michael Collins e Buzz Aldrin levaram pouco mais de 3 dias e meio para realizar a viagem até a Lua.

Assim como se deixa transparecer acima, as viagens espaciais são cheias de fascínios e curiosidades, as quais muitas pessoas têm um grande interesse de ver, aprender e entender; não somente em sua parte retórica, mas também os números que elas carregam por trás. Então, por que não a apresentar nas escolas e para a sociedade presente no meio acadêmico para ajudá-los a entendê-la, principalmente neste momento em que as viagens a Marte estão ganhando cada vez mais espaço na mídia? Por isso, o foco principal será buscar uma abordagem que permita que alunos do Ensino Médio ou indivíduos que já passaram por ele e compreendem partes da Física presentes em viagens espaciais, possam de tal forma colaborar com a divulgação científica através de discussões envolvendo temas contemporâneos. Respeitando o nível de ensino e um processo ensino-aprendizagem coerente para alunos do Ensino Médio, é possível apresentá-los conceitos utilizados na realização dos cálculos iniciais que levaram o ser humano à Lua e que, agora, servem de base para levá-lo à Marte.

METODOLOGIA

Este trabalho se propõe a servir como base fundamental para o ensino de Física no Ensino Médio, sendo especialmente direcionado tanto para professores da educação básica quanto para os cursos de formação de docentes. A abordagem adotada considera cenários simplificados para descrever as jornadas espaciais, a fim de tornar a linguagem matemática mais acessível. Para tanto, buscou-se descrever as viagens espaciais através de conceitos comumente apresentados no Ensino Médio (como a Lei da Gravitação Universal de Newton, o Movimento Circular Uniforme, o Movimento Retilíneo Uniforme, entre outros) com o intuito de aproximar a física dessas viagens do conhecimento já adquirido pelos estudantes. Além disso, procurou-se reduzir os rigores matemáticos e físicos o máximo possível para deixar os conteúdos explorados mais simples e acessíveis aos estudantes. A primeira viagem espacial explorada é a da Lua, a qual é amplamente divulgada pelos meios de comunicação e é mais conhecida pela população geral. Isso facilita a contextualizar as ciências da Física para as viagens espaciais, principalmente com auxílio de recursos didáticos facilitadores (como gráficos e simulações), assim como apontado por Miranda, Vanin e Bechara (2004). As principais grandezas estudadas são a aceleração e as energias mecânicas envolvidas na viagem, pressupondo um cenário em que a viagem é linear, e que o planeta Terra e o satélite natural Lua estão parados. Em seguida, é apresentada uma argumentação teórica sobre a importância do movimento de rotação da Terra para o lançamento de objetos para o espaço sideral, evidenciando o porquê muitas bases estão próximas à Linha do Equador.

Em um segundo momento, é desenvolvido os estudos acerca da viagem a Marte, estipulando o tempo que uma nave espacial demoraria para percorrer a distância do planeta Terra até o planeta Marte em uma órbita de transferência que leva em consideração os ângulos orbitais entre os planetas no momento do lançamento e os movimentos que o foguete realiza durante a viagem, tal como a Órbita de Transferência de Hohmann. Em grande parte do trabalho, é enfatizado a importância do uso de figuras, gráficos e simulações para enriquecer e facilitar o ensino de Física. Em especial, é explorado o programa GeoGebra (n.d.) - um programa com

interface de livre acesso, online e intuitivo de manusear - para mostrar a sua diversidade e como pode ser usado em diversos esquemas de apresentação (como slides ou materiais online).

ABORDAGENS SIMPLIFICADAS PARA ESTUDAR A VIAGEM À LUA

Em 20 de junho de 1969, a agência espacial americana NASA enviou os astronautas Neil Armstrong, Buzz Aldrin e Michael Collins na missão que se tornaria responsável pelo primeiro pouso do ser humano na Lua. A partir dessa missão – que foi nomeada Apollo 11 – é possível obter informações importantes acerca das viagens espaciais.

De modo a aplicar a abordagem sugerida neste trabalho para viagens espaciais, considerar-se-á alguns itens essenciais. O primeiro deles é calcular a aceleração exercida no foguete durante o seu percurso Terra-Lua, em que será considerado que os astros celestes em questão estão espacialmente parados (não transladam ou rotacionam em torno de seus eixos de rotação) e o foguete fará um movimento retilíneo da Terra até a Lua. Para isso, usaremos a Lei da Gravitação Universal de Newton, que é dada por:

$$F = \frac{G.m_1.m_2}{R^2} \quad (1)$$

Pela equação 1, entende-se que o módulo da força gravitacional (F) é proporcional ao produto das massas dos dois corpos (m_1 e m_2) e inversamente proporcional ao quadrado da distância (R), em que a constante de proporcionalidade é G (conhecida como constante de gravitação universal). Em nossa proposta, assumimos que existem apenas dois corpos celestes que exercem força gravitacional sobre o foguete: a Terra e a Lua; e as tradicionais notações vetoriais e coordenadas espaciais são apresentadas por ideias mais simples, que conseguem refleti-las e, ao mesmo tempo, são mais compreensíveis para um estudante que está aprendendo física. A força gravitacional sentida pelo foguete é representada por uma pequena seta que sai dele e aponta para o centro do astro que o atrai, e a trajetória (que tem a mesma direção da velocidade) é retratada por uma longa seta que tem o seu início e fim, respectivamente, nas superfícies da Terra e da Lua. Por estas representações, ensina-se que a força gravitacional recebe um sinal positivo (uma força que colabora a viagem a se realizar) quando estiver na mesma direção daquela da trajetória (e da velocidade, por consequência), e recebe um sinal negativo (uma força que dificulta) se essas mesmas setas apontam para sentidos opostos. Essa proposta almeja que o ensino vetorial das viagens espaciais seja realizado com abordagens visuais (setas), e reforçadas por palavras que atribuam e justifiquem os sinais de cada força para a realização da viagem entre astros, como positivo-colaborar e negativo-atrapalhar.

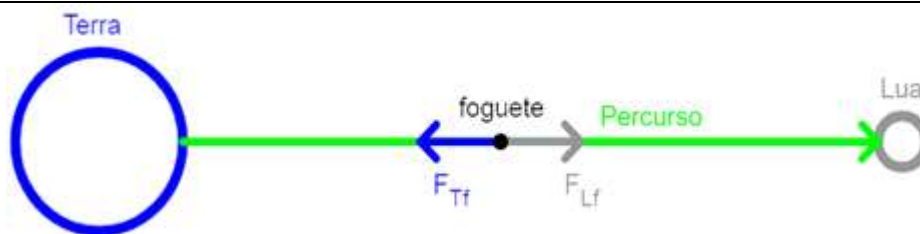


Figura 2: Sentido das forças atuantes sobre o foguete na trajetória Terra-Lua.
 Fonte: RODRIGUES, J. H. Figura feita utilizando a ferramenta GeoGebra. 2023.

A Figura 2 ilustra a proposta descrita no parágrafo anterior, onde o aro em azul representa o planeta Terra, o aro em cinza representa o satélite Lua, a seta longa em verde simboliza o percurso linear da Terra até a Lua, e as setas curtas em azul e em cinza são, na devida ordem, as forças gravitacionais que a Terra e a Lua fazem no foguete. Quando a seta da força está no mesmo sentido da do percurso, entende-se que a força é positiva e contribui para o foguete chegar à Lua, e quando está no sentido contrário, entende-se que a força é negativa e atrapalha o foguete a chegar à Lua. Por essas caracterizações, o sinal que acompanha o termo referente à interação Terra-foguete carrega consigo o sinal negativo, uma vez que a força do planeta agirá no sentido contrário à trajetória do objeto. Por outro lado, o termo referente à interação Lua-foguete carrega o sinal positivo, já que a força do satélite natural agirá na mesma direção da trajetória do objeto. Tem-se, portanto, a seguinte equação:

$$\mathbf{F}_R = -\frac{G.M_T.m_f}{(R_{Tf})^2} + \frac{G.M_L.m_f}{(R_{Lf})^2} \quad (2)$$

A equação acima é composta por algumas constantes, como G (constante de gravitação universal), M_T (massa da Terra) e M_L (massa da Lua), e os termos variáveis, como R_{Tf} (distância Terra-foguete) e R_{Lf} (distância Lua-foguete) e m_f (massa do foguete). A massa do foguete depende do próprio foguete que será lançado, e considerando que a ideia deste trabalho é compreender a física por trás das viagens espaciais de maneira geral, não se pode prender-se apenas a um tipo de foguete. Para tanto, analisar-se-á a força por quilograma do foguete, cuja razão resultará, também, na aceleração gravitacional que o foguete sentirá durante o seu percurso (a_f). Ao considerar tal cenário, encontra-se que:

$$\frac{F_R}{m_f} = \mathbf{a}_f = -\frac{G.M_T}{(R_{Tf})^2} + \frac{G.M_L}{(R_{Lf})^2} \quad (3)$$

A equação acima pode ser simplificada e apresentar uma variável dinâmica a menos ao interpretar e compreender que a variável R_{Lf} é dada pela distância da Terra-Lua (R_{TL}) (um valor médio constante e tabelado, o qual o estudante pode consultar) menos a distância Terra-foguete (R_{Tf}) (uma variável já presente na equação):

$$R_{TL} = R_{Tf} + R_{fL} \rightarrow R_{fL} = R_{TL} - R_{Tf}. \quad (4)$$

Assim, a equação pode reescrita como:

$$\mathbf{a}_f = -G \left[\frac{M_T}{(R_{Tf})^2} - \frac{M_L}{(R_{TL} - R_{Tf})^2} \right] \quad (5)$$

Uma outra vantagem da substituição acima é apresentar ao estudante que uma variável pode apresentar vínculos com outras já presentes na equação e que alterá-la também modifica as essas demais. No caso dessa simplificação, é apresentar matematicamente que afastar o foguete da Terra (ou seja, aumentar o R_{Tf}) implica na aproximação do foguete à Lua (diminuir o R_{fL}) ou diminuir a distância entre o foguete e a Lua (diminuir o $R_{TL} - R_{Tf}$). Por fim, a última manipulação a fazer é colocar em evidência os termos M_L e R_{TL} , que são constantes já conhecidas e tabeladas, e os seus isolamentos facilitará futuras construções de gráficos. A equação abaixo define, portanto, a aceleração no foguete em termos de R_{Tf}/R_{TL} :

$$\mathbf{a}_f = -\frac{G.M_L}{(R_{TL})^2} \left[\frac{(M_T/M_L)}{(R_{Tf}/R_{TL})^2} - \frac{1}{[1 - (R_{Tf}/R_{TL})]^2} \right] \quad (6)$$

Ao realizar as manipulações acima, resta agora substituir os valores das massa ($M_L = 7,36 \times 10^{22} \text{ kg}$ e $M_T = 5,972 \times 10^{24} \text{ k}$), da distância ($R_{TL} = 3,82 \times 10^8$) e da constante da

gravitacional universal ($G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$), e proceder com as operações matemáticas, os quais nos levam em:

$$a_f = -3,392921 \times 10^{-5} \text{ N/kg} \left[\frac{81,25}{x^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \right], x = R_{Tf}/R_{TL} \quad (7)$$

Acima, na equação 7, substituímos a razão R_{Tf}/R_{TL} pela variável x , o que nos ajudará a apresentar as distâncias entre o foguete e a Terra com uma didática mais acessível para os estudantes: ao invés de mostrarmos a escala da distância com valores numéricos reais (da literatura), exporemos em uma escala percentual da distância entre Terra e a Lua, a qual é mais fácil de compreender e ajudará os estudantes a visualizar melhor a posição do foguete entre os dois astros. A equação acima expressa a aceleração em função de N/kg para apresentar e reforçar aos estudantes que estamos interessados em saber qual é a força exercida pelos astros para cada quilograma do foguete.

É necessário estabelecer limites de distância para que os resultados não extrapolem a distância Terra-Lua e que o foguete saia de uma superfície e chegue na outra. Para isso, divide-se as distâncias conhecidas (raios dos astros pela distância entre seus centros) e se estabelece estas como limites. A distância mínima ($x_{\text{mínimo}}$) reflete a decolagem do foguete a partir da superfície do planeta Terra (cujo raio é dado por $R_T = 6,37 \times 10^6$), enquanto a distância máxima ($x_{\text{máximo}}$) reflete seu pouso na superfície da Lua ($R_{TL} - R_L$, sendo $R_{TL} = 3,82 \times 10^8 \text{ m}$ o valor médio da distância entre os centros da Terra e da Lua, e $R_L = 1,74 \times 10^6$ o raio da Lua):

$$x_{\text{mínimo}} = \frac{R_T}{R_{TL}} = \frac{6,37 \times 10^6}{3,82 \times 10^8} \approx 0,016675392 \quad (8)$$

$$x_{\text{máximo}} = \frac{R_{TL} - R_L}{R_{TL}} = \frac{3,82 \times 10^8 - 1,74 \times 10^6}{3,82 \times 10^8} \approx 0,995445026 \quad (9)$$

Portanto, os limites são $0,016675392 \leq x \leq 0,995445026$. Aplicando os limites (8) e (9) na equação (7), obtemos o seguinte resultado.

$$g(x_{\text{mínimo}}) \approx -9,98 \text{ m/s}^2 \quad (10)$$

$$g(x_{\text{máximo}}) \approx +1,68 \text{ m/s}^2 \quad (11)$$

A aceleração da gravidade no ponto mínimo, ou seja, quando o foguete está na Terra, é aproximadamente o valor da gravidade na Terra. Quando o foguete está no ponto máximo, na Lua, ele assume a gravidade na Lua. Os resultados obtidos condizem com aqueles apresentados por Halliday, Resnick e Walker (2016). A seguir, na Figura 3, é apresentado o gráfico da aceleração gravitacional sentida pelo foguete na trajetória linear Terra-Lua.

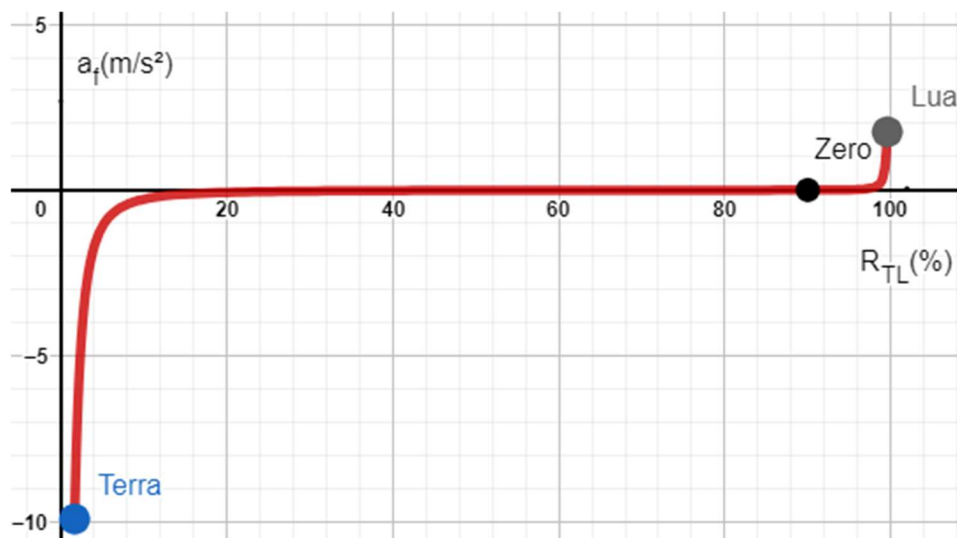


Figura 3 – Gráfico da aceleração a que o foguete está submetido devido apenas às massas da Terra e da Lua, na trajetória Terra-Lua.

Fonte: OLIVEIRA, J.M. Gráfico plotado utilizando a ferramenta GeoGebra. 2022.

Um fato interessante a respeito do gráfico presente na Figura 3 é que existe um ponto “Zero” (90% R_{TL} , quando $x = 0,900136586$) entre o percurso Terra-Lua, onde o objeto (o foguete) assume uma aceleração gravitacional igual a zero. Isso ocorre quando as forças gravitacionais da Terra e da Lua se anulam, e a partir deste ponto, pode-se entender que o foguete escapou da força gravitacional da Terra e será, agora, atraído pela força gravitacional da Lua.

TRABALHO FEITO PELA FORÇA GRAVITACIONAL E ENERGIA GASTA PELO FOGUETE

A abordagem desta seção tem o objetivo de ampliar o entendimento da relação entre energia e trabalho ao apresentar que é preciso dispor de energia (no caso do foguete, pela queima de combustível) para vencer a força opositora da gravidade que “trabalha” para puxar o foguete de volta para a superfície e da força de arrasto que retira a sua energia de movimento (a energia

cinética). A ideia principal é apontar que a energia mínima que o foguete precisa usar para realizar o percurso é a proveniente do trabalho da força gravitacional, tendo a energia advinda do trabalho da força de arrasto como um custo de energia a mais e presente somente na atmosfera terrestre.

No entanto, a força gravitacional e a força de arrasto não são constantes durante o percurso do foguete e o desenvolvimento matemático para obter as energias a partir de seus trabalhos se prossegue através do uso da integração (uma ferramenta matemática que é apresentada em alguns cursos de Ensino Superior), já que tanto a gravidade quanto a densidade do ar não são constantes. E não somente isto, o resultado da integração, por si só, apresenta muitas grandezas físicas acompanhadas por diversos operadores matemáticos, o que pode ser complicado contextualizá-las e explicá-las em sala de aula, principalmente para estudantes do Ensino Médio que estão sendo introduzidos ao conteúdo de Física.

Por esse motivo, o desenvolvimento realizado aqui será mais simples e tem a finalidade de servir como um guia breve para o professor entender os passos que usamos para produzir o gráfico da energia mínima do foguete a partir do trabalho da força gravitacional (Figura 4), que é o principal instrumento que sugerimos usar em sala de aula para apresentar o tema desta seção. A partir dele, planeja-se mostrar graficamente que a energia consumida pelo foguete tem relações com a magnitude da força gravitacional que ele sente durante o percurso.

Em vista da apresentação acima, indica-se que uma das formas que podemos usar para estipular a energia mínima gasta pelo foguete (E_f) é através do trabalho realizado pela força gravitacional no foguete (W), o qual podemos entender pela relação:

$$E_f = -W; \quad (12)$$

$$W = \int_{R_T}^R \vec{F} \cdot d\vec{l}; \quad (13)$$

em que \vec{F} é a força da gravidade, R é posição que o foguete se encontra entre a Terra e a Lua, R_T é o raio da Terra (a posição inicial de “partida” do foguete) e $d\vec{l}$ é o seguimento do caminho que o foguete pode percorrer. Acima, a energia gasta é positiva, pois o trabalho realizado pela força gravitacional no foguete é negativo, uma vez que a força gravitacional é contrária e antiparalela ao caminho feito pelo foguete. Quando se realiza o cálculo da integral que define o trabalho (W), chega-se aos resultados a seguir:

$$W = - \left(\frac{G.M_T m_f}{R} + \frac{G.M_L m_f}{R_{TL}-R} \right) + \left(\frac{G.M_T m_f}{R_T} + \frac{G.M_L m_f}{R_{TL}-R_T} \right) \quad (14)$$

A partir daqui, serão repetidos os mesmos passos realizados na seção anterior:

- Divide pela massa do foguete (obtendo-se, a energia gasta por quilograma do foguete);
- Substitui-se R_{Lf} por $R_{TL} - R_{Tf}$;
- Coloca-se em evidência os termos G , M_L e R_{TL} ;
- Troca-se R/R_{TL} por x e R_T/R_{TL} por $x_{\text{mínimo}}$;
- E, por fim, faz-se a substituição numérica.

Assim, ter-se-á que:

$$\frac{E_f}{m_f} = \frac{-W}{m_f} = + \frac{G.M_L}{R_{TL}} \left[\frac{(M_T/M_L)}{x} + \frac{1}{(1-x)} \right] - \frac{G.M_L}{R_{TL}} \left[\frac{(M_T/M_L)}{x_{\text{mínimo}}} + \frac{1}{(1-x_{\text{mínimo}})} \right] \quad (15)$$

Considerando então a última equação e substituindo os dados que já se conhece, como a constante G e os valores de massa, obtém-se os resultados a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{E_f}{m_f} = \frac{-W}{m_f} = & -12.816,178\,01 \text{ J/kg} \left[\frac{81,25}{x} + \frac{1}{(1-x)} \right] + \\ & + 12.816,178\,01 \text{ J/kg} \left[\frac{81,25}{0,016675392} + \frac{1}{(1-0,016675392)} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Os limites para esta equação são os mesmos limites estabelecidos para a equação da aceleração no foguete, uma vez que a energia está sendo definida a partir da trajetória do foguete partindo da superfície da Terra até a superfície da Lua. Portanto, tal como visto anteriormente, tem-se que $0,016675392 \leq x \leq 0,995445026$.

Abaixo, na Figura 4, encontra-se o gráfico da equação acima em função do eixo x , o qual está expresso em porcentagem da distância que o foguete está entre o centro do planeta Terra com o do satélite Lua, R_{TL} (%), por entendemos ser mais simples de apresentar para os estudantes do Ensino Médio. O eixo vertical (eixo y) está na unidade de 10 MJ/kg , a fim de facilitar a visualização dos resultados e tornar melhor seu entendimento.

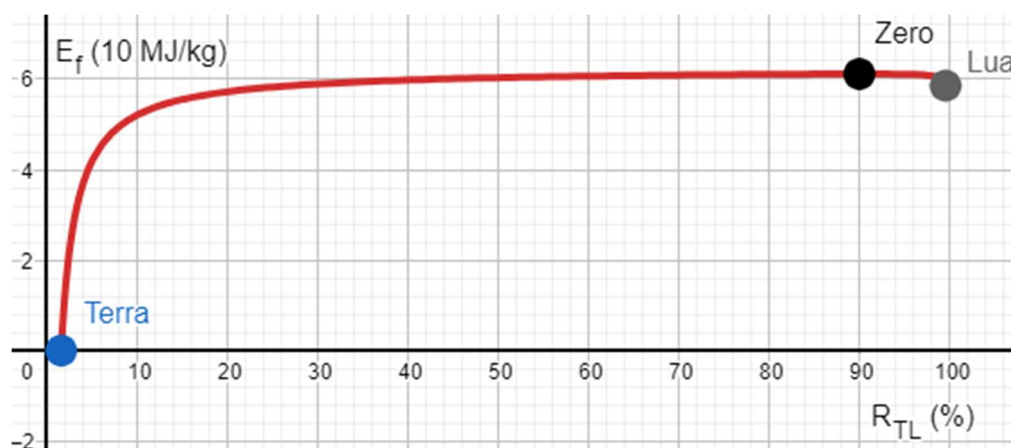


Figura 4 – Gráfico da Energia Potencial sobre o foguete.

Fonte: OLIVEIRA, J. M. Gráfico plotado utilizando a ferramenta GeoGebra. 2022.

No gráfico da Figura 4 é possível observar padrões interessantes pelo comportamento da curva. Nota-se que o foguete gasta uma grande energia até, aproximadamente, 10% R_{TL} , mais de 80% da energia máxima de toda viagem. Este resultado se mostra claro com o auxílio da Figura 3, a qual revela que o foguete está sob a influência de uma grande aceleração gravitacional até esta posição também e, por isso, precisa despendar grandes energias para vencer a força gravitacional. A partir de 10% R_{TL} , a aceleração da gravidade é menor e o foguete precisa gastar uma quantidade menor de energia para continuar o seu percurso até chegar ao ponto “Zero” (o mesmo da Figura 3). A partir dele, um padrão interessante aparece, onde é possível ver que a energia claramente passa a ‘cair’. Isso se dá pelo fato de que o gráfico foi construído considerando que a energia gasta pelo foguete é dada apenas pelo inverso do trabalho realizado pela força gravitacional, que é uma força conservativa. Aproximadamente, nos primeiros 90% da trajetória, a força gravitacional é contrária ao deslocamento do foguete. Isso resulta em uma contribuição negativa ao trabalho quando se avança o percurso e, conseqüentemente, há a necessidade de gasto de energia positiva para que se possa realizá-lo (ou seja, é preciso gastar energia para ir contra a força da gravidade). No entanto, nos 10% restantes do percurso, ao passar do ponto “Zero”, a força gravitacional e o deslocamento têm o mesmo sentido, o que resulta em uma contribuição positiva ao trabalho e, pelas nossas simplificações, isso proporciona uma recuperação de energia ao foguete. Contudo, a nossa atual tecnologia de viagens espaciais não permite transformar e armazenar o trabalho realizado no foguete em algum tipo de energia que ele possa usar posteriormente, como, por exemplo, para voltar da Lua para a Terra. Por este motivo, entende-se somente que não é mais necessário gastar energia do foguete para chegar à Lua a partir do ponto “Zero”; a própria inércia do foguete o

faria (só para chegar lá, o que exclui o gasto de energia para fazer um pouso seguro e controlado).

O trabalho realizado pela força de arrasto, por sua vez, está presente somente na atmosfera terrestre, o que leva a entender que a energia consumida pelo foguete até a posição $10\% R_{TL}$ seja maior ainda, e, após estes, o foguete escapa da atmosfera terrestre e a quantidade consumida seria similar àquela proposta pelo gráfico.

FACILITADORES DE LANÇAMENTO

Os foguetes devem ser lançados de tal forma que alcancem a órbita desejada ao redor da Terra com velocidade suficiente para evitar serem atraídos de volta à superfície pelo campo gravitacional e essa velocidade depende da altura acima da Terra. Por exemplo, a Estação Espacial Internacional circula a Terra uma vez a 1,5 horas (90 minutos) a uma velocidade de cerca de 27.000 quilômetros por hora (executando 16 ciclos ao longo do dia), enquanto viaja a uma altitude de cerca de 400 quilômetros.

A fim de diminuir o gasto de energia, o foguete pode aproveitar a rotação do planeta Terra e ser impulsionado para sua órbita ao adotar a velocidade superficial do planeta onde está pousado (que depende da latitude), e assim, começar a sua viagem com uma energia inicial de movimento (a energia cinética). A caso de exemplo, um ponto no equador está girando a 1.670 quilômetros por hora para percorrer a distância de 40.000 km em 24 horas. Dentro do mesmo período de 24 horas, um ponto mais próximo do polo percorre uma distância menor: a velocidade de um ponto na superfície devido à rotação da Terra é de 1.180 quilômetros por hora a 45 graus de latitude. Como resultado, quanto mais próximo do equador um foguete for lançado, maior será a sua velocidade inicial devido à rotação da Terra e, conseqüentemente, menos combustível será usado para atingir a órbita alvo, tal como demonstrado na Figura 4.

A altura também auxilia no lançamento do foguete, uma vez que quanto mais alto ele estiver, maior será a sua velocidade (e a sua energia inicial de movimento), assim como apresentado pela equação abaixo:

$$v = \omega_T \cdot R_p \quad (17)$$

$$k_f = \frac{1}{2} m_f \cdot v^2 \quad (18)$$

Onde v é a velocidade tangencial na superfície do planeta, ω_T é a velocidade angular de rotação da Terra (que é constante), R_p é a distância perpendicular do foguete em relação ao eixo de rotação da Terra, k_f é a energia cinética inicial do foguete e m_f é a massa do foguete. Ao fazer a substituição da velocidade tangencial na equação de energia cinética, tem-se que:

$$k_f = \frac{1}{2} \cdot m_f (\omega_T \cdot R_p)^2 \quad (19)$$

Aplicando a distribuição a potência e isolando a massa do foguete, temos que:

$$\frac{k_f}{m_f} = \frac{1}{2} \cdot \omega_T^2 \cdot R_p^2 \quad (20)$$

A Figura 5 ilustra como a velocidade tangencial na superfície do planeta (v) muda de acordo com longitude (afastamento da Linha do Equador), sendo que **N** e **S** representam, respectivamente, o norte e o sul geográfico da Terra, β representa o ângulo entre os paralelos da latitude dos pontos **A** e **B**, ω representa a velocidade angular da Terra em torno do seu eixo de rotação, e **O** e **O'** são pontos no eixo de rotação de mesmas latitudes dos, na devida ordem, pontos **A** e **B**. Nota-se que R_p varia de acordo com as seguintes situações: quanto mais próximo da Linha do Equador for realizado o lançamento, maior será o valor de R_p ; quanto mais alto for o ponto de lançamento do foguete, maior será esse valor.

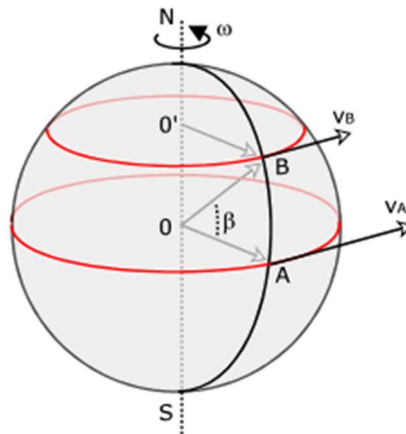


Figura 5 – Velocidade tangencial para dois pontos na superfície da Terra.

Fonte: MSPC. Disponível em: https://www.mspc.eng.br/dir40/cin_210.php. Acesso em: 01 dez. 2022.

A imagem acima (Figura 5) possibilita obter a relação entre a latitude do ponto de lançamento e a trajetória realizada por um objeto genérico, a qual consegue obter a relação de R_p com R_T por:

$$R_p = R_T \cdot \cos \beta \quad (21)$$

Portanto, a relação entre a altura e a energia é dada por:

$$\frac{k_f}{m_f} = \frac{1}{2} \cdot \omega_T^2 (R_p \cdot \cos \beta)^2 \quad (22)$$

A equação acima revela que a energia cinética máxima que o foguete pode adquirir será quando $\beta = 0$. Ao usar os valores das grandezas $\omega_T \approx 7,292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ e $R_T = 6,372 \times 10^6$, consegue-se concluir que:

$$\begin{aligned} \frac{k_f}{m_f} &\approx \frac{1}{2} \cdot (7,292 \times 10^{-5} \text{ rad/s})^2 (6,37 \times 10^6 \text{ m} \cdot \cos 0)^2 \\ &\approx 1,08 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1,08 \times 10^{-2} \text{ 10 MJ/kg} \end{aligned} \quad (23)$$

Teoricamente, a energia cinética por quilograma adquirida pelo foguete em seu lançamento representa uma economia de energia para chegar à Lua e, conseqüentemente, precisaria de uma menor quantidade de combustível para realizar a viagem. Ao se comparar o valor encontrado com o valor presente no gráfico 4 (Figura 4) de, aproximadamente, $6,1 \times 10 \text{ MJ/kg}$, é possível notar que a economia é relativamente pequena (de aproximadamente, 0,18% da energia total por quilograma - 18 partes em cada 10000). No entanto, mesmo que pequena, esta é muito bem-vinda, uma vez que o combustível faz parte da massa do foguete e quanto mais pesado ele é, mais energia e mais combustível serão necessários para realizar a viagem (ou seja, um efeito dominó: é preciso usar mais combustível para levar mais combustível). Não obstante, maiores quantidades de combustível precisam, também, de maiores tanques para armazená-los, o que aumentaria o peso do foguete, o que precisaria (de novo) mais combustível para levar mais peso do tanque.

Para dar uma ideia da quantidade de energia que pode ser economizada, é preciso saber qual o peso aproximado de combustível que é transportado durante a viagem. A fim contextualizar este cenário, pode-se apresentar o seguinte exemplo: de acordo com o CBIE, em um artigo publicado em outubro de 2020 (Centro Brasileiro de Infraestrutura [CBIE] 2020), “um ônibus espacial decola com mais de 3 milhões de litros de combustíveis, que somados, pesam cerca de 728 toneladas. Para comportar este volume, um tanque de combustível de um ônibus espacial possui cerca de 50 metros de largura e pode pesar até 30 toneladas vazio.” (Neste caso, sabe-se que um ônibus espacial não tem a mesma finalidade de uma nave que viajaria até a Lua, mas estabelece um parâmetro que permite o cálculo aproximado, que é a finalidade deste trabalho). Portanto, ao considerar que a economia de 0,18% reflete (em uma análise simplificada) diretamente na redução de combustível (que é a fonte de energia propulsora), vemos que o foguete deixará de levar, aproximadamente, 1,31 toneladas. Logo, a massa reduzida é grande, podendo ser comparada a um satélite de grande porte que, de acordo com a Constelação de Nano Satélites Ambientais (n.d.), seria aquele que teria uma massa superior à de 1000 k (uma tonelada).

ABORDAGENS SIMPLIFICADAS PARA ESTUDAR A VIAGEM PARA MARTE

Para que se possa chegar à Marte, neste estudo, considera-se que os planetas exercem movimento circular uniforme e que o foguete, predominantemente, não sofrerá aceleração gravitacional significativa (na Figura 3, viu-se que a aceleração de gravidade na reta que liga os dois astros próximos, Terra e Lua, era em grande parte muito pequena. Logo, para astros cuja distância entre si é maior, como Terra e Marte, entende-se que a gravidade será graficamente pontual e respectiva aos próprios planetas). A velocidade circular do foguete, neste caso, será igual ao que ele obteve no planeta Terra e o radial será uma constante que permitirá o foguete sair da órbita da Terra para a de Marte. Com tais considerações, espera-se encontrar qual é a posição relativa dos planetas para que o foguete saia da Terra e seja ‘capturado’ por Marte.

Para tanto, vamos definir as equações da variação das posições angulares (θ) dos planetas Terra (subíndice T) e Marte (subíndice M) em função do tempo (t) e de suas velocidades angulares (ω):

$$\theta_T(t) = \theta_{T,0} + \omega_T \cdot \Delta t; \quad (24)$$

$$\theta_M(t) = \theta_{M,0} + \omega_M \cdot \Delta t; \quad (25)$$

em que o subíndice zero (0) representa as grandezas iniciais de cada planeta, a qual considera-se que irá acontecer no tempo zero, no momento do lançamento do foguete. Para simplificação

de contas e de entendimento, considerar-se-á que a posição angular da Terra no lançamento seja zero ($\theta_{T,0} = 0$) e que o foguete (cuja posição angular será descrita por θ_f) seja apanhado por Marte quando a distância entre os planetas for a menor possível, a qual ocorrerá quando " $\theta_M = \theta_T$ ", o que se leva a concluir que:

$$\theta_T(t) = \theta_f(t) = \theta_{T,0} + \omega_T \cdot \Delta t; \theta_{T,0} = 0 \quad (26)$$

$$\theta_M(t) = \theta_{M,0} + \omega_M \cdot \Delta t \quad (27)$$

$$\omega_T \cdot \Delta t = \omega_M \cdot \Delta t + \theta_{M,0} \rightarrow \theta_{M,0} = (\omega_T - \omega_M) \cdot \Delta t \quad (28)$$

Ao usar as velocidades angulares orbitais dos planetas Terra ($\omega_T = 1/12$) e Marte ($\omega_M = 1/22,6$) – a unidade de medida das velocidades é a de revoluções por meses, sendo que a Terra faz uma revolução a cada 12 meses e Marte faz uma revolução a cada 22,6 meses – e considerar que o tempo da viagem (Δt), será de 8,5 meses, conclui-se que:

$$\theta_{M,0} = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{22,6} \right) \cdot 8,5 \text{ meses} \approx 0,33 \text{ revolução} = 119,6^\circ \quad (29)$$

Utilizando os conceitos dos movimentos de translação de cada planeta e a conclusão acima, estima-se que a diferença entre a posição angular de Marte e a da Terra (0°) no momento do lançamento seja de $119,6^\circ$. A Figura 6 representa o percurso realizado pelo foguete do planeta Terra até ao planeta Marte de acordo com a proposta e os dados deste trabalho. Nela, temos que cada ponto em preto representa a posição do foguete a cada meio mês após o seu lançamento do planeta Terra (em azul) em uma rotação no sentido anti-horário até a sua chegada no planeta Marte (em vermelho). Os discos preenchidos representam os planetas na chegada do foguete, os vazios representam os planetas no lançamento do foguete e as circunferências representam as orbitas circulares dos planetas.

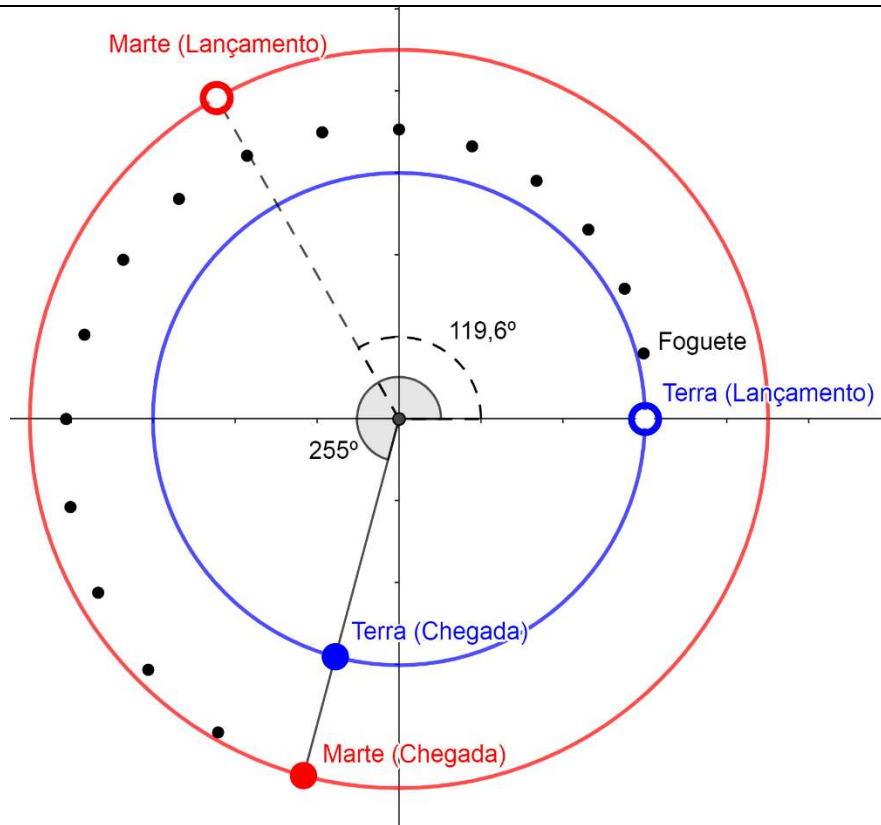


Figura 6 – Trajetória de lançamento para Marte de acordo com os dados obtidos neste trabalho.
 Fonte: RODRIGUES, J.H. 2023. Figura feita com o aplicativo GeoGebra.

Os valores apresentados e obtidos acima refletem um estudo de movimento circular com alguns parâmetros já conhecidos na literatura. Em nossa introdução, apresentamos a trajetória de Hohmann (Ornes 2018), a qual indica que o foguete levaria 8,5 meses para sair da Terra e chegar a Marte. A posição angular inicial da Terra e de Marte no lançamento do foguete são de, respectivamente, 0° e de 44° , e a posição angular final destes planetas na chegada do foguete seriam, na devida ordem, de 255° (em sua translação usual de 360° em 12 meses, a Terra percorre 255° em 8 meses e meio) e de 180° (Figura 1). Ao comparar estes valores com aqueles que propomos e obtivemos em nosso trabalho, notamos que as posições de Marte se diferenciam pelo mesmo valor de, aproximadamente, 75° ($119,6 - 44 \approx 255 - 180 = 75$). Se reduzirmos as posições angulares de Marte do nosso trabalho em 75° , chega-se a valores próximos ao do JPL. Abaixo, segue o esquema matemático que ilustra a mudança.

$$\theta'_M(t) = \theta'_{M,0} + \omega_M \cdot \Delta t \rightarrow \text{valores do JPL} \quad (30)$$

$$\theta'_M(t) + 75^\circ = \theta'_{M,0} + 75^\circ + \omega_M \cdot \Delta t \quad (31)$$

$$\theta_M(t) = \theta_{M,0} + \omega_M \cdot \Delta t \rightarrow \text{valores deste trabalho} \quad (32)$$

Uma outra análise interessante a se explorar em sala de aula dos resultados acima é comparar as trajetórias que o foguete realizou nos percursos do artigo do JPL (Figura 1) com a do nosso trabalho (Figura 6). Percebe-se que a distância radial percorrida entre órbitas foi a mesma percorrida, indicando que as velocidades lineares (radiais) em ambos trabalhos são as mesmas (distância entre as órbitas dividido pelo tempo da viagem). A variação da posição angular, por outro lado, já não é. Enquanto no artigo do JPL o foguete varre um ângulo de 180° ao sair da Terra e chegar a Marte, em nosso trabalho o foguete varre um de 255° , o qual ele fez ao adotar a velocidade angular da Terra. Isso revela que a velocidade angular da Órbita de Transferência de Hohmann (180° em 8,5 meses) é feita com uma velocidade angular intermediária entre aquela dos dois planetas: menor do que a da Terra (255° em 8,5 meses) e maior do que a de Marte (136° em 8,5 meses). Apesar da simplicidade da conclusão, entendemos que ele propicia uma ótima oportunidade para discussão de ideias e reflexão de entendimentos sobre o movimento orbital dos corpos em órbita.

Os estudos realizados aqui mostram que as simplificações da viagem à Marte permitiram construir uma metodologia que é fácil de apresentar no Ensino Médio, por ser condizente com os conteúdos ensinados nesta modalidade de ensino. Não somente isso, os seus resultados se aproximam daqueles presentes na literatura, precisando fazer somente algumas adaptações.

CONCLUSÃO

As viagens espaciais despertam o interesse de muitas pessoas e é um ótimo tema para abordar e fazer divulgação científica no Ensino Médio, principalmente sobre as atuais explorações do planeta Marte. Por um lado, entendemos que é possível divulgá-la retoricamente, debatendo e mostrando o como se daria uma viagem tripulada e quais são os contratempos que a impedem dela ocorrer nos dias atuais (recursos tecnológicos limitados, a duração da viagem e quantidade de recursos necessários para levar, etc). Por outro lado, percebemos que é inviável apresentá-la com uma abordagem física-matemática técnica e fidedigna para esse nível de Ensino, pois precisa-se de conhecimentos que são ensinados posteriormente para alguns cursos do Ensino Superior. Por este motivo, propomos realizar algumas simplificações e trabalharmos com um número reduzido de variáveis físicas que tentam ensinar sobre viagem interplanetária explorando somente um pouco de sua base teórica. Vimos que foi possível adaptar o conteúdo para uma linguagem mais simples e aplicável no Ensino Médio, o que levam a resultados próximos daqueles apresentados na literatura.

Iniciamos os estudos pela viagem à Lua, uma vez que é bem difundida e conhecida pela população, o que entendemos ser um bom começo para introduzir as ideias das viagens espaciais e as físicas por trás delas. Primeiro, realizamos o estudo da força gravitacional no foguete quando este realiza um percurso retilíneo da Terra à Lua (considerando que estes últimos estão parados) e encontramos que a aceleração gravitacional nas superfícies dos astros é mais intensa e iguais aquelas presentes na literatura, e que grande parte da viagem ocorre com uma aceleração gravitacional desprezível, quase nula. Observamos que há uma inversão do sentido da aceleração gravitacional em, aproximadamente, 90% do percurso, o qual o nomeamos de ponto “Zero”. Em seguida, usamos o trabalho da força gravitacional para calcular a energia mínima consumida pelo foguete, e mostramos que grande parte dela é consumida próximo à superfície da Terra (onde há uma grande força gravitacional) e que consumo poderia ser interrompido a partir do ponto “Zero”, onde a gravidade da Lua supera a da Terra. Esclarecemos que os lançamentos de foguete realizados em regiões próximas à Linha do Equador fazem com que ele adquira uma energia inicial de movimento maior do que se ele fosse lançado de outras regiões da Terra, o que favorece uma economia de combustível, cujo peso pode ser equiparado ao de um grande satélite.

Em seguida, prosseguimos com os estudos da viagem espacial a Marte, a qual estendemos um resultado obtido nos estudos da viagem até a Lua e consideramos que ela ocorreria predominantemente sem uma aceleração gravitacional atuante no foguete. Assim, por este entendimento, consideramos que o foguete faria seu percurso através de dois movimentos: retilíneo uniforme (assim como o da Lua) e o circular uniforme, onde ele teria a mesma velocidade angular do planeta Terra. Ao considerar que o foguete faz seu percurso em 8,5 meses (um valor presente na literatura), obtivemos que a variação de posição angular do foguete em sua viagem foi de $119,6^\circ$, um valor próximo àquele apontado por Ornes (2018) em seu artigo, precisando fazer um pequeno translado de valores para encontrar a equivalência entre os resultados do seu trabalho com os do nosso. Também, foi possível perceber que a Órbita de Transferência de Hohmann acontece com uma velocidade angular intermediária entre os dois planetas em questão, sendo maior do que a de Marte e menor do que a da Terra.

Além das abordagens apresentadas acima, sugerimos que o ensino deste conteúdo seja complementado com figuras ilustrativas e por gráficos, assim como fizemos aqui. Usamos o programa GeoGebra para gerar muitos de nossos gráficos e figuras para enfatizar e estimular esta abordagem educacional. Escolhemo-lo por ser muito acessível a todos: é gratuito, é fácil de manusear (pode programá-lo por interface) e pode ser usado online, o que dispensa o uso de um computador para instalá-lo. Outra sugestão para complementar o ensino de viagens espaciais é o uso de jogos eletrônicos de simulação que permitem mostrar as viagens espaciais com uma maior riqueza de detalhes, os quais são difíceis de apresentá-las em uma sala de aula com o uso de quadro e giz, ou maquetes, por exemplo. Sugerimos o *Spaceflight Simulator*⁴ (Spaceflight Simulator n.d.), o qual permite realizar simulações que envolvem a construção, a correção de trajetória e o pouso de foguetes em corpos celestes, tornando, assim, os estudos

4 https://store.steampowered.com/app/1718870/Spaceflight_Simulator/

sobre o tema mais completos e, de uma certa maneira, mais próximos da realidade. Caso não haja um dispositivo adequado para simular o jogo, os detalhes dele podem ser vistos e explorados no canal Youtube do Frederico Andrade (Frederico Andrade n.d.), em que o youtuber simula as viagens até a Lua e até Marte com riqueza de detalhes de suas etapas, entre outros. Ainda, Wei e Zhang (2019) apresentam alternativas para realizar simulações computacionais, utilizando Python para simular a órbita de transferência de Hohmann e a trajetória do foguete.

REFERÊNCIAS

- Frederico Andrade. (n.d.). *Página principal* [Canal do YouTube]. YouTube. Recuperado em 7 nov. 2022, de <https://www.youtube.com/@FredericoAndrade>
- Boice, J. D. (2017). Space: The Final Frontier—Research Relevant to Mars. *Health Physics*, 112 (4), 392–397. Recuperado de doi:10.1097/HP.0000000000000656
- Buchanan, M. (2017). Colonizing mars. *Nature Physics*, 13(11), 1035–1035. Recuperado de doi:10.1038/nphys4311
- Centro Brasileiro de Infraestrutura (2020). *Com o que as naves espaciais são abastecidas?*. Recuperado de <https://cbie.com.br/artigos/com-o-que-as-naves-espaciais-sao-abastecidas/>
- Constelação de Nano Satélites Ambientais. (n.d.). *Nano satélites*. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI). Recuperado em 21 dez., 2023, de <http://www.crn.inpe.br/conasat1/nanosatt.php>
- Figueiredo, S. (2021). Rumo a Marte: as missões espaciais que podem mudar o futuro da Terra. *VEJA*. Recuperado de <https://veja.abril.com.br/ciencia/rumo-a-marte-as-missoes-espaciais-que-podem-mudar-o-futuro-da-terra/>.
- Geogebra (n.d.). *GeoGebra - Aplicativos Matemáticos*. Recuperado em 19 mai., 2023, de <https://www.GeoGebra.org/>
- Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2016). *Fundamentos de Física: gravitação, ondas e termodinâmica* (10th ed.). Rio de Janeiro: LTC.
- Horvath, J. E. (2008). *ABCD da Astronomia e Astrofísica*. São Paulo - SP: Livraria da Física.
- Indian Space Research Organization (2023) *Chandrayaan-3*. Recuperado de <https://www.isro.gov.in/Chandrayaan3.html>
- Jet Propulsion Laboratory (n.d.) *Educator Guide: Let's Go to Mars! Calculating Launch Windows*. National Aeronautics and Space Administration (NASA), California Institute of Tecnology. Recuperado em 24 nov., 2022, de <https://www.jpl.nasa.gov/edu/teach/activity/lets-go-to-mars-calculating-launch-windows/>.
- Macau, E., & Winter, O.C (2007). *A Conquista do Espaço: Do Sputnik à Missão Centenário*. São Paulo: Livraria da Física.

- Miranda, R. M., Vanin, V. R., & Bechara, M. J. (2004). *Uso de simulações em disciplinas básicas de Mecânica em um curso de Licenciatura em Física*. In Programas e Resumos. São Paulo: SBF. Recuperado de <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/epef/ix/sys/resumos/RO115-1.pdf>
- MSPC (2022). Recuperado de https://www.mspc.eng.br/dir40/cin_210.php
- National Aeronautics and Space Administration (n.d.a). *Venus Overview*. Recuperado em 7 ago. 2022, de: <https://science.nasa.gov/venus/>
- National Aeronautics and Space Administration (n.d.b). *Mercury Overview*. Recuperado em 7 ago. 2022, de: <https://science.nasa.gov/mercury/>
- National Aeronautics and Space Administration (n.d.c). *Jupiter Overview*. Recuperado em 7 ago. 2022, de: <https://science.nasa.gov/mercury/>
- National Aeronautics and Space Administration (2006). Project Mercury: A Chronology. SP-4001. Recuperado de <https://history.nasa.gov/SP-4001/cover.htm>.
- National Aeronautics and Space Administration (2019) *50 Years Ago: Apollo 11 – The Journey Home*. Recuperado de <https://www.nasa.gov/history/50-years-ago-apollo-11-the-journey-home/>
- National Aeronautics and Space Administration (2020). *Mars 2020 Perseverance Rover*. Recuperado de <https://mars.nasa.gov/mars2020/>
- National Aeronautics and Space Administration (2022). Overview Mars – *NASA Solar System Exploration*. Recuperado em 7 ago. 2022, de <https://solarsystem.nasa.gov/planets/mars/overview/>
- Project dearMoon (n.d.). *The first civilian mission to the Moon by SpaceX*. Recuperado em 20 de dezembro de 2023, de <https://dearmoon.earth/>
- Ornes, S. (2018). The long road to Mars. *Physics World*, 31(2), 25–29. Recuperado de doi:10.1088/2058-7058/31/2/29
- Spaceflight Simulator (n.d.). Página principal [Steam]. Recuperado em 7 nov. 2022, de https://store.steampowered.com/app/1718870/Spaceflight_Simulator/
- SpaceX (n.d.). *Space Exploration Technologies Corporation*. Recuperado em 20 de dezembro de 2023, de <https://www.spacex.com/>
- Stinner, A., & Begoray, J. (2005). Journey to Mars: the physics of travelling to the red planet. *Physics Education*, 40(1), 35–45. Recuperado de doi:10.1088/0031-9120/40/1/002
- Superinteressante (2011). Os primeiros passos rumo a Marte. Recuperado de <https://super.abril.com.br/ciencia/os-primeiros-passos-rumo-a-marte>
- Wei, Y., & Zhang, Y. (2019) The Simulation and the Calculation of the Shortest Hohmann Transfer Orbit to Mars. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 07(10), 2384–2400. Recuperado de doi:10.4236/jamp.2019.710162
- Zanin, T. (2023a). Quantos litros de água se deve beber por dia?. *Tua Saúde*, nov. 2023. Recuperado de <https://www.tuasaude.com/beber-agua/>.
- Zanin, T. (2023b). Calculadora de calorias: quantas ingerir por dia?. *Tua Saúde*, fev. 2023. Recuperado de <https://www.tuasaude.com/como-calcular-o-gasto-calorico/>.