



REVISITANDO A LEI DAS ÁREAS

Paulo Bedaque¹
Rodolfo Caniato²

RESUMO: Com este trabalho os autores pretendem colaborar para o desenvolvimento do aprendizado de Física no Ensino Médio, propondo que se revise a Lei das Áreas, chamada também de Segunda Lei de Kepler, ampliando o seu campo de validade. Ao contrário do que possa parecer, até mesmo um Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) obedece a Lei das Áreas e não apenas os planetas e satélites imersos em um campo gravitacional. Embora não seja um fato desconhecido, esses casos, muitas vezes, passam despercebidos aos professores do Ensino Médio.

PALAVRAS-CHAVE: Kepler, Movimento dos planetas, Lei das Áreas, Conservação do momento angular.

REVISANDO LA LEY DE ÁREAS

ABSTRACT: With this work, the authors intend to contribute to the development of Physics learning in High School, proposing to revisit the Law of Areas, also called Kepler's Second Law, expanding its field of validity. Contrary to what it may seem, even a Uniform Rectilinear Motion obeys the Law of Areas and not just planets and satellites immersed in a gravitational field. Although it is not an unknown fact, these cases often go unnoticed by high school teachers.

KEYWORDS: Kepler, angular momentum conservation, Area's Law.

REVISITING THE AREAS LAW

RESUMEN: Con este trabajo, los autores pretenden contribuir al desarrollo del aprendizaje de la Física en la Escuela Secundaria, proponiendo que se revise la Ley de Áreas, también llamada Segunda Ley de Kepler, ampliando su campo de validez. Al contrario de lo que pueda parecer, incluso un Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU) obedece a la Ley de Áreas y no sólo los planetas y satélites inmersos en un campo gravitacional. Aunque no es un hecho desconocido, estos casos muchas veces pasan desapercibidos para los profesores de secundaria.

PALABRAS CLAVE: Kepler, Movimiento de los planetas, Ley de Áreas, Conservación del momento angular.

¹bedaque@ciencias.com.br

²rodolphocaniato@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

Quando se fala em Lei das Áreas, imediatamente nos vem à lembrança a Segunda Lei de Kepler, publicada em 1609. Trata-se de uma lei que surgiu de observações muito precisas, para a época, dos movimentos planetários, em especial feitas pelo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), com quem Johannes Kepler (1571-1630) trabalhou no final da vida do primeiro. Apesar do convívio curto, de cerca de um ano, Kepler herdou o conjunto de dados precisos e preciosos acumulados por Brahe. Um pouco mais desta dupla, da relação entre eles e sobre as Leis de Kepler, podem ser encontradas em Brody e Brody (1999).

Mas o que muitas vezes passa despercebido aos professores, é que a Lei das Áreas não se aplica apenas a órbitas elípticas ou circulares, para corpos “presos” em um campo gravitacional, como é o caso dos planetas e dos satélites (artificiais ou naturais), como se costuma ensinar. Ela vale para muitas outras trajetórias e situações que não necessariamente envolvam campos gravitacionais. O presente trabalho pretende explorar este tema, incluindo modelos didáticos e experimentos que possam ser reproduzidos na escola com estudantes do Ensino Médio.

Coube, mais tarde, a Isaac Newton demonstrar as leis de Kepler, usando sua Teoria da Gravitação Universal.

As leis de Kepler não são o objeto principal deste trabalho e o mesmo ocorre com os movimentos planetários. Assume-se que tais leis sejam conhecidas dos leitores, mas para não correr o risco de um vácuo conceitual em nossa exposição, revisaremos parte delas, naquilo que interessa aos nossos propósitos.

2. LEI DAS ÁREAS DE KEPLER

A primeira Lei de Kepler afirma que as trajetórias dos planetas são elípticas e não circulares como se acreditava até então. E neste caso, o Sol ocupa um dos focos da elipse. Já a terceira lei de Kepler relaciona o período orbital dos planetas (Período Sideral) com as suas distâncias médias ao Sol. Aliás, esta última lei acabou por sugerir que a ação entre duas massas é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas e que culminou na Lei da Gravitação Universal de Newton.

Basicamente, a Lei das Áreas, conhecida como segunda Lei de Kepler, afirma que o raio vetor de um planeta, “varre” áreas iguais em tempos iguais. Por raio vetor, entendemos o vetor que parte do centro do Sol e termina no centro do planeta (fig. 1). Usando um referencial preso no centro do Sol, o raio vetor indica a posição do centro do planeta em um certo instante de sua órbita, ou seja, seu vetor posição.

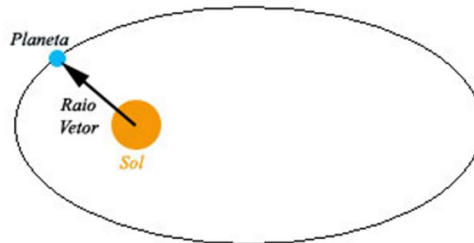


Figura 1: Raio vetor de um planeta

Fonte: <https://educacao.uol.com.br/disciplinas/fisica/gravitacao-as-leis-de-kepler-e-a-lei-da-gravitacao-universal.htm?next=0004H158U144N>

Na realidade, os planetas não orbitam exatamente ao redor do Sol, mas ao redor do centro de massa do sistema (CM). No caso do Sistema Terra-Sol, o CM está praticamente no centro de nossa estrela, graças às diferenças muito grandes de massas. No caso do sistema Júpiter-Sol, o CM está ligeiramente fora da superfície do Sol, tal a massa deste planeta que é maior que de todos os planetas do Sistema Solar juntos.

Com o transcorrer do tempo, entre dois instantes t_1 e t_2 , o raio vetor “varre” determinada área que chamaremos de A_{12} . Mais adiante, entre dois instantes t_3 e t_4 , também “varrerá” determinada área do plano da órbita do planeta, que chamaremos de A_{34} . A Lei das áreas nos diz que, se $\Delta t_{12} = \Delta t_{34}$, então $A_{12} = A_{34}$ (fig. 2).

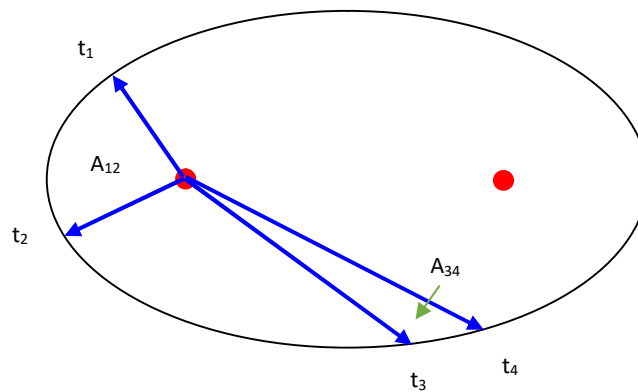


Figura 2: Se os tempos de percurso são iguais, as áreas são iguais.

Fonte: esquema feito pelos autores.

Uma primeira consequência da Lei das áreas para o movimento planetário é que decorre daí que a velocidade do planeta aumenta à medida que ele se aproxima do Sol e diminui quando ele se afasta. Considerados tempos iguais (fig. 3), as áreas das figuras MNS e QRS devem ser iguais e, numa primeira aproximação, pensando nessas figuras como “triângulos arredondados”, o de maior base deve ter menor altura.

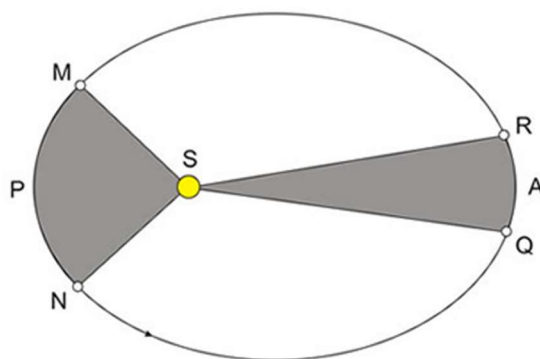


Figura 3: Percursos de um planeta próximo ao afélio e ao periélio.

Fonte: <https://www.fq.pt/astronomia/leis-de-kepler>

Na Internet está disponível um simulador das Leis de Kepler, oferecido pela Universidade de Nebraska, que pode ser usado com os alunos (<http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.html>). Também se encontra disponível um tutorial para este simulador, oferecido pela UFRGS (<http://www.if.ufrgs.br/fiso2001/aulas/roteiro-simulacaonebrasca-leis-de-kepler.pdf>).

3. UM PRÉ-REQUISITO IMPORTANTE – CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

O leitor que estiver familiarizado com este tema, pode passar ao próximo item. Porém, os autores optaram por facilitar as buscas do leitor numa possível revisão.

O chamado momento linear ou ainda quantidade de movimento linear (\vec{p}) em um certo instante, é definido, para um corpo em translação, como o produto entre sua massa e sua velocidade ($\vec{p} = m\vec{v}$). A direção e o sentido de \vec{p} são os mesmos de \vec{v} . A velocidade é medida em relação a algum referencial, portanto, a quantidade de movimento varia de acordo com este referencial.

A quantidade de movimento está ligada a uma importante lei de conservação. Em sistemas isolados, onde a resultante das forças externas é zero, a quantidade de movimento total do sistema é constante. Esta conservação se

aplica largamente em colisões de pontos materiais, elásticas ou não, nas situações em que a resultante das forças externas é nula.

Mas quando se inclui a rotação de corpos, ou mesmo o movimento curvilíneo ao redor de outros corpos, como no caso da translação dos planetas ao redor do Sol, outra grandeza física se torna importante: o momento angular (\vec{L}), que também é conhecido como momentum angular ou ainda quantidade de movimento angular. É definido como o produto vetorial entre o vetor posição e o momento linear, dado em relação a um referencial escolhido (fig. 4).

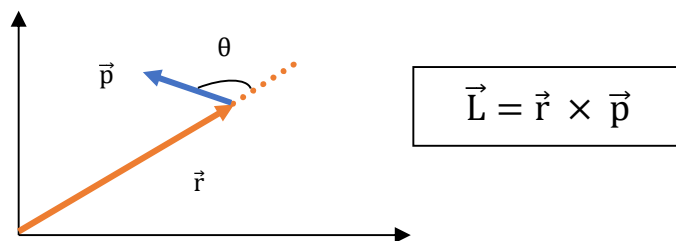


Figura 4 - Momento angular de uma partícula em um plano. Esquema feito pelos autores.

Por se tratar de um produto vetorial, a direção de \vec{L} é sempre perpendicular ao plano definido por \vec{p} e \vec{r} . Seu sentido é dado pela regra da mão direita e, no caso da fig. 4, ele está apontando para fora do plano do papel. Seu módulo é dado por $L = p.r.\text{sen}\theta = m.V.r.\text{sen}\theta$.

A variação temporal de \vec{L} será:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \quad (\text{I})$$

Mas, a Segunda Lei de Newton da Dinâmica nos diz que a força resultante que atua no corpo é dada pela variação temporal do momento linear:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{II})$$

E sabemos que a taxa de variação de \vec{r} nada mais é que a velocidade \vec{V} da partícula.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{III})$$

Substituindo (II) e (III) e (I), temos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_R + \vec{V} \times \vec{p} \quad (\text{IV})$$

O produto vetorial $\vec{V} \times \vec{p} = 0$, pois \vec{V} e \vec{p} têm a mesma direção e sentidos. Assim, resta que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_R \quad (\text{V})$$

O lado direito da equação (V) nada mais é que a definição de torque ($\vec{\tau}$). Neste caso, o torque é associado à força resultante. Assim temos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_R \quad (\text{VI})$$

A expressão (VI) nos mostra que, quando o torque é nulo, a derivada temporal do momento angular é zero, o que nos leva a concluir que, nestes casos, o momento angular é constante, em módulo, direção e sentido.

$$\vec{\tau}_R = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte} \quad (\text{VII})$$

Este será o caso de todas as partículas sujeitas a uma força central, se escolhermos adequadamente o polo para o cálculo do torque. Para demonstrar isso, escolhamos este polo no centro da origem da força. Neste caso, esta última e o vetor posição terão a mesma direção e sentidos contrários, o que torna nulo o produto vetorial que define o torque (fig. 5).

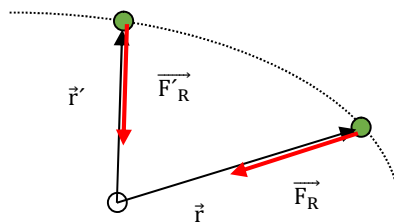


Figura 5: Partícula sujeita a força resultante central. O torque resultante será nulo em qualquer ponto da trajetória, desde que a origem do sistema de referência dos vetores posição esteja no centro das forças. Esquema feito pelos autores.

4. NEWTON E A LEI DAS ÁREAS

Quando publicou sua teoria da Gravitação Universal, Isaac Newton (1642-1727) foi estimulado por seus colegas a demonstrar as Leis de Kepler. Afinal, essas eram empíricas, com uma base muito sólida nos dados precisos de Tycho Brahe e uma teoria que explicasse os movimentos planetários e dos satélites deveria dar conta de chegar nelas. Newton mostrou que as leis de Kepler poderiam ser derivadas de sua teoria da Gravitação e ampliou seus limites. Com respeito à primeira Lei de Kepler, sobre as órbitas elípticas, Newton mostrou que as trajetórias podem ser na verdade alguma das seções cônicas (círculo, elipse, hipérbole e parábola) e não apenas uma elipse, sendo que as duas últimas representam órbitas abertas. Podemos encontrar a demonstração de Newton e outras alternativas semelhantes em French (1974), Reinhardt (1975), Smart (1977) e Neves e Argüello (1986). Porém, para não deixar um vazio que poderia prejudicar a leitura deste trabalho, optamos por apresentar a demonstração a seguir.

Para o cálculo do torque, usaremos como polo o ponto central da origem das forças gravitacionais que atuam no corpo. No caso dos planetas, este ponto seria o foco ocupado pelo Sol. Na fig. 6 o vetor \vec{r} representa o vetor posição no instante t (ponto A). Após um intervalo de tempo infinitesimal dt , o novo vetor posição será dado por \vec{r}' , apontando para o ponto B, sendo θ um ângulo externo ao triângulo OAB.

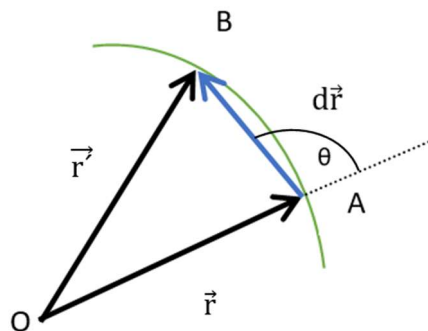


Figura 6: Mudança no vetor posição de um corpo em um intervalo de tempo infinitesimal. Esquema feito pelos autores.

Como estamos trabalhando com valores de dt , que tendem a zero, o trecho da trajetória descrita se aproxima de um segmento de reta de comprimento dr e, portanto, podemos dizer que a figura OAB é um triângulo. A área infinitesimal dA deste triângulo pode ser dada por $(\text{base} \times \text{altura})/2$, ou seja:

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot dr \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|$$

Mas $d\vec{r} = \vec{V}dt$. Substituindo na expressão acima, temos:

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{V}| dt$$

Ou

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{V}|$$

Mas $m|\vec{r} \times \vec{V}| = L$ (módulo do momento angular). Assim:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad (\text{VIII})$$

Portanto, para os casos em que o momento angular é constante, a variação temporal da área também será. Em outras palavras, a área varrida pelo vetor posição é sempre a mesma quando consideramos intervalos de tempos iguais e como ponto para cálculo dos torques o centro das forças. Assim, fica evidente que a Lei das Áreas não é privilégio de planetas ou de demais corpos “presos” gravitacionalmente a outros. Mesmo para esses casos, convém lembrar que ela continua válida quando as trajetórias são abertas, como hipérbolas e parábolas.

5. LEI DAS ÁREAS NOS MOVIMENTOS EM GERAL

Alguns dos exemplos a seguir podem ser encontrados com mais detalhes em Caniato (1990).

Para quebrar a ideia de que a Lei das Áreas só se aplica a órbitas planetárias, comecemos com o MRU. Geometricamente, podemos concluir que, para qualquer ponto de referência escolhido arbitrariamente fora da linha de movimento, vale a Lei das Áreas, como veremos a seguir.

Para isso consideremos um ponto material movendo-se em MRU sobre o eixo x da fig. 7. Para intervalos de tempos iguais, o corpo sofrerá deslocamentos iguais, representados pelos vetores vermelhos da fig. 7.

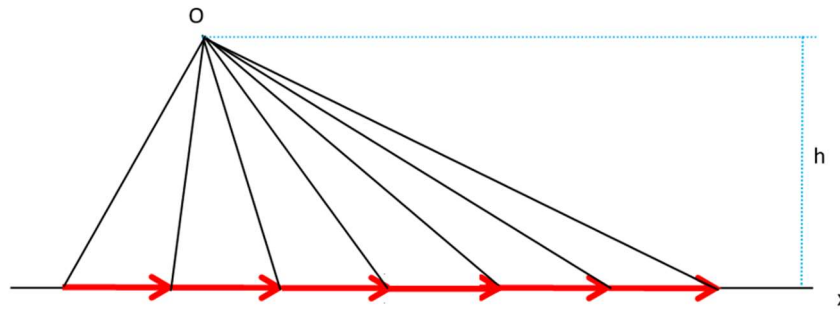


Figura 7 - partícula em MRU sobre o eixo x. Esquema feito pelos autores.

Escolhido o ponto O como polo para cálculo do torque, podemos facilmente concluir que todos os triângulos têm a mesma área, já que as bases têm o mesmo comprimento e a altura h é a mesma para todos. Portanto, vale neste caso a Lei das Áreas qualquer que seja o ponto O escolhido fora do eixo x.

Embora a geometria resolva a questão, podemos calcular o módulo do momento angular no caso do MRU e comprovar que ele é constante em todos os pontos da trajetória (fig. 8).

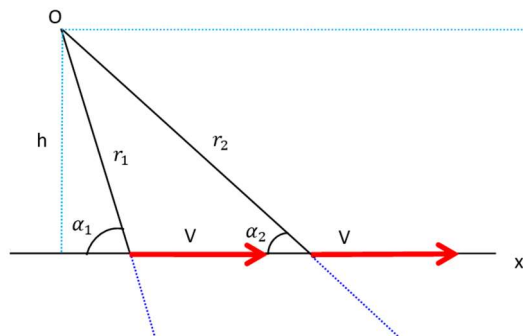


Figura 8 - Conservação do Momento Angular no MRU. Esquema feitos pelos autores.

Para o primeiro caso, temos:

$$L_1 = m \cdot v \cdot r_1 \cdot \sin(\alpha_1)$$

$$\text{Mas } \sin(\alpha_1) = \frac{h}{r_1}$$

Substituindo na equação de cima, temos:

$$L_1 = m.V.r_1.\text{sen}(\alpha_1) = m.V.r_1.\frac{h}{r_1}$$

$$L_1 = m.V.h$$

$$\text{Para o segundo caso temos: } L_2 = m.V.r_2.\text{sen}(\alpha_2) = m.V.r_2.\frac{h}{r_2} = m.V.h$$

Ou seja, o momento angular se conserva e, portanto, é válida a Lei das Áreas, como já era sabido.

Já vimos que Newton mostrou que, para o movimento dos corpos celestes, orbitando corpos centrais bem mais massivos, as órbitas possíveis são as seções cônicas, ou seja, circulares, elípticas, hiperbólicas ou parabólicas. Em todas elas vale a Lei das áreas se escolhermos esses corpos centrais como ponto para cálculo do torque. Nos perguntamos se, para um corpo lançado obliquamente da superfície da Terra, quando é possível desprezar a resistência do ar, se é válida a Lei das Áreas. Será que o projétil de um tiro de canhão é ponta de um vetor posição que varre áreas iguais em tempos iguais? A resposta é sim, se o ponto escolhido for o centro da Terra.

Isso ocorre porque a força gravitacional que age no projétil aponta sempre para o centro da Terra. Por ser uma força central, o torque é nulo em cada ponto da trajetória e caímos em casos já discutidos anteriormente.

O problema é normalmente estudado para pequenas velocidades de lançamento, o que resulta em deslocamentos pequenos sobre a superfície do planeta. Nesta situação, se desconsidera a curvatura da Terra e se aceita que a força gravitacional é constante em todos os pontos da trajetória, em módulo, direção e sentido. Neste caso a força gravitacional se chama peso, é sempre vertical e aponta para baixo para um observador local, postado na superfície da Terra (fig. 9).

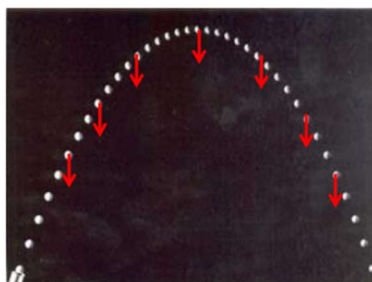


Figura 9: Foto estroboscópica de um lançamento oblíquo no vácuo. Para trechos pequenos, comparados à dimensão da Terra e em que se desconsidera a sua curvatura, a força gravitacional (peso) é vertical, para baixo e tem intensidade constante. Os apliques em vermelho, representando a força peso, foram incluídos pelos autores.

Fonte: https://www.researchgate.net/figure/A-stroboscopic-photograph-of-a-projectile_fig1_253053187

O movimento horizontal será uniforme, já que nenhuma força age no corpo nesta direção. Já o movimento vertical será uniformemente variado, pois uma força constante resulta numa aceleração constante, que é a aceleração da gravidade. O resultado dessas aproximações nos leva a concluir que a trajetória do móvel, neste caso, é uma parábola. Para demonstrar este fato, basta lembrar que as funções horárias dos movimentos horizontal (eixo x) e vertical (eixo y) são:

$$x = x_0 + V_{0x}t$$

$$y = y_0 + V_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Da primeira podemos isolar o valor de t e obter:

$$t = \frac{x - x_0}{V_{0x}}$$

Substituindo esta expressão na segunda, obtemos:

$$y = y_0 + V_{0y} \left(\frac{x-x_0}{V_{0x}} \right) + \frac{1}{2}g \left(\frac{x-x_0}{V_{0x}} \right)^2 \rightarrow y = y_0 + V_{0y} \left(\frac{x-x_0}{V_{0x}} \right) + \frac{1}{2}g \left(\frac{x^2 - 2xx_0 + x_0^2}{V_{0x}^2} \right)$$

$$y = y_0 + \frac{V_{0y}}{V_{0x}}x - \frac{V_{0y}}{V_{0x}}x_0 + \frac{1}{2V_{0x}^2}gx^2 + \frac{1}{2}g \left(\frac{-2xx_0 + x_0^2}{2V_{0x}^2} \right)$$

$$y = \frac{1}{2V_{0x}^2}gx^2 + \frac{V_{0y}}{V_{0x}}x + y_0 - \frac{V_{0y}}{V_{0x}}x_0 + \frac{1}{2}g \left(\frac{-2xx_0 + x_0^2}{2V_{0x}^2} \right)$$

Se:

$$a = \frac{1}{2V_{0x}^2}g \quad b = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} \quad c = y_0 - \frac{V_{0y}}{V_{0x}}x_0 + \frac{1}{2}g \left(\frac{-2xx_0 + x_0^2}{2V_{0x}^2} \right)$$

A função $y = f(x)$ será do tipo $y = ax^2 + bx + c$. O gráfico desta função é uma parábola e representa a trajetória do corpo, como havíamos afirmado.

Este é um contexto de aproximações que, embora justificadas para pequenas alturas e deslocamentos, não corresponde ao fato de que a força gravitacional é central, aponta sempre para o centro da Terra, sofrendo, portanto, variação constante de direção. Sua intensidade também sofre variações, já que a distância ao centro da Terra se altera a cada ponto (fig. 10).

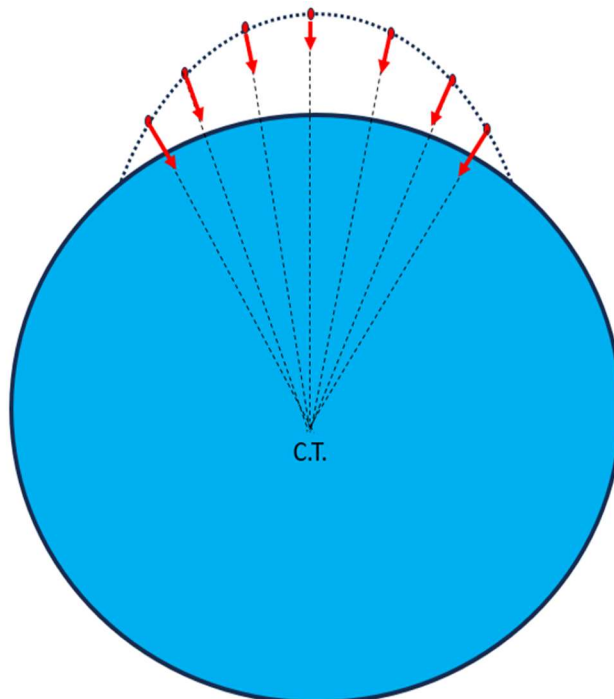


Figura 10: Lançamento oblíquo em que a curvatura da Terra é relevante. A força gravitacional é central, aponta para o centro da Terra (C.T.) com intensidade e direção que se alteram a cada ponto.

Na fig. 10 ressaltamos que os comprimentos dos vetores representam as forças de atração da Terra sobre o corpo não respeitam a proporcionalidade real e aqui aparecem apenas como ilustração.

No caso ilustrado na fig. 10 as equações usadas comumente no Ensino Médio (EM) deixam de ser válidas, pois agora a própria aceleração varia. Suas componentes horizontal e vertical também são variáveis de modo que dizer que o movimento horizontal é uniforme e o vertical é uniformemente variado, como se faz no EM, deixa de ser correto. Na realidade, sem as simplificações indicadas, a trajetória de um corpo em lançamento oblíquo no vácuo não é um arco de parábola e sim um trecho de elipse como podemos ver em French (1974).

Outro caso interessante é de um corpo de massa m , que pode girar sobre uma mesa, livre de atritos (fig. 11). Uma aproximação para isso seria um sabonete sobre uma mesa bem lisa e molhada. Ele está preso a um fio que passa por um orifício da mesa e pode ser puxado ou aliviado por um observador, alterando assim a curvatura da trajetória do corpo.

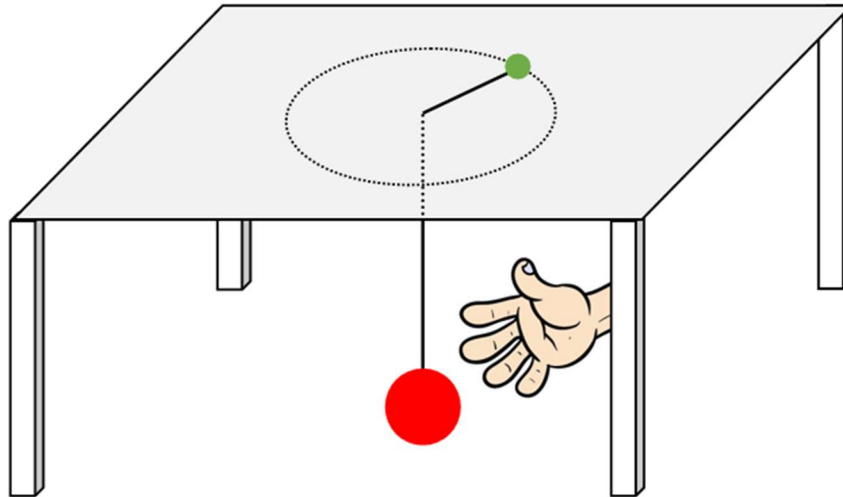


Figura 11: Corpo em movimento curvilíneo sobre uma mesa sem atrito.
Esquema construído pelos próprios autores.

Enquanto o raio de curvatura é constante, o corpo descreve um MCU (Movimento Circular Uniforme) e, evidentemente é válida a Lei das Áreas, pois se trata de um movimento sob força central, que é a tração do fio. Mas a ação do observador pode alterar, para mais ou para menos, o raio de curvatura da trajetória. E ainda assim, vale a Lei da Áreas, pois ainda neste caso, o corpo está sob ação de uma força central. A conservação do momento angular explica por que o módulo da velocidade do corpo aumenta quando o raio diminui, exatamente como a situação de uma dançarina de balé quando fecha os braços em um movimento de rotação em torno de seu próprio eixo vertical. O contrário também ocorre, ou seja, quando o raio aumenta, a velocidade diminui.

Considere a situação hipotética abaixo (fig. 12), onde o observador atuou de modo a alterar o raio da trajetória, para mais e para menos, durante um certo intervalo de tempo. Na figura, são mostradas algumas posições do corpo, em diferentes instantes do movimento.

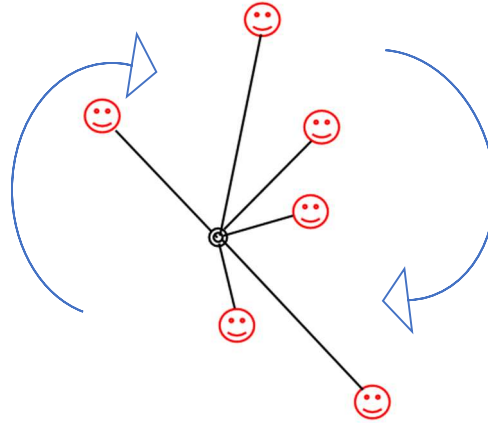


Figura 12: Corpo girando ao redor de um ponto fixo, com o raio de curvatura variando ao longo do tempo.

Certamente a Lei das Áreas é válida também neste caso já que o corpo está sempre sob ação de uma força central. A intensidade da força varia, o raio da trajetória varia, o módulo da velocidade do corpo varia, mas ainda assim, o momento angular se conserva e isto basta para que a Lei das Áreas tenha validade. Como já dissemos, esta lei não é restrita ao movimento planetário.

Semelhante a este último exemplo, a fig. 13 traz a representação de um disco que desliza sem atrito sobre uma mesa. Como se fosse uma foto estroboscópica, os pontos P_1, P_2, \dots, P_7 representam posições ocupadas pelo disco, separadas por intervalos de tempos iguais, todos de um segundo. Sem atrito, com um pequeno impulso o disco deslizaria em MRU sobre a mesa. É o que ocorre entre os pontos P_1, P_2 e P_3 . Porém, no centro da mesa, no ponto C , há um centro de forças, que pode agir sobre o disco a qualquer momento. Esta força pode mudar de intensidade e de sentido, mas terá sempre a direção do centro. Vamos assumir que as representações dos pontos P_3 em diante coincidem com os momentos em que o disco recebeu um empurrão ou um puxão instantâneos.

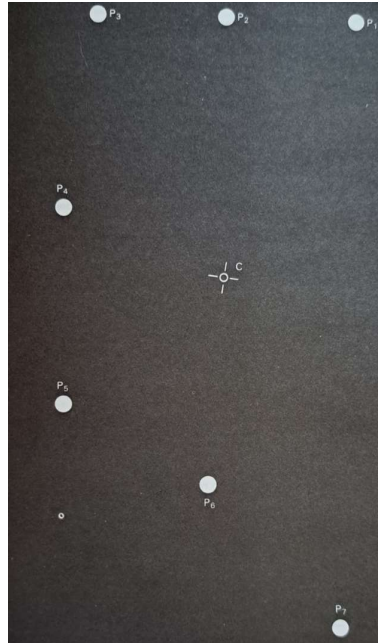


Figura 13: Os pontos representam posições separadas pelo intervalo de 1 s.
fonte: Caniato (1990) página 121 digitalizada conforme a original.

Os estudantes podem entender melhor como o fenômeno se desenrola, usando a Segunda Lei de Newton, ou seja, $\vec{F} = m\vec{a}$. Ela nos garante que a variação da velocidade, representada pela aceleração, tem a mesma direção e sentido da força (fig. 14). Isso significa a variação da velocidade $\Delta\vec{V}$ tem a mesma direção de sentido da força.

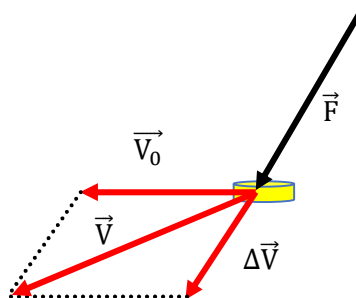


Figura 14: Força aplicada sobre um corpo que trafega com velocidade \vec{V}_0 . Esquema feito pelos próprios autores.

Na figura acima temos a representação de um corpo que trafega com velocidade \vec{V}_0 , quando recebe a ação de uma força \vec{F} . Sua nova velocidade será \vec{V} e chamaremos de $\Delta\vec{V}$ a variação da velocidade no intervalo. Esta última terá sempre a direção e o sentido da força, como nos garante a segunda lei de Newton.

Voltando à fig. 13, no instante em que o móvel está em P_3 , ele recebe um “puxão” dirigido ao ponto C e, portanto, a variação de velocidade sofrida também deverá apontar para C. É importante lembrar que o puxão não altera a componente da velocidade perpendicular a ele. Esta componente é a mesma antes do puxão, atente para este importante detalhe.

Após um segundo, em P_4 o corpo sofre novamente um puxão e, desta vez, menor que o anterior. Do mesmo modo, a variação de velocidade que ele experimenta aponta para C. Mais uma vez ressaltamos que a componente da velocidade perpendicular à força não se altera. Um segundo mais e, em P_5 , este evento se repete (figs. 14 e 15).

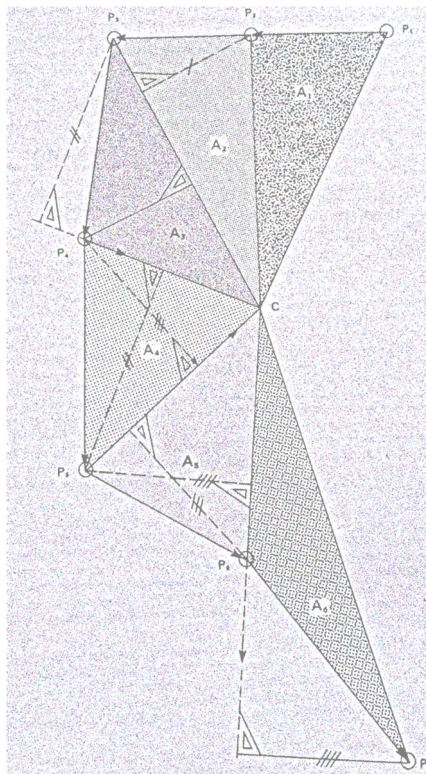


Figura 15: As áreas sombreadas mostram as áreas varridas pelo vetor posição em cada trecho.

fonte: Caniato (1990) página 124 digitalizada conforme o original.

Em P_6 o corpo recebe, não um puxão, mas um “empurrão” de modo que a variação de velocidade, ainda que tenha a direção do centro, aponta “para fora”.

Como as forças são sempre centrais ou nulas, sabemos que o momento angular se conserva e que a Lei das Áreas é válida. Mas podemos deixar isso mais evidente aos alunos, mostrando este resultado geometricamente. Vejamos como isso é possível.

Da fig. 15, as áreas A_1 e A_2 são iguais, como já vimos para o MRU. As áreas A_2 e A_3 também são iguais, pois os triângulos correspondentes têm base comum (CP_3) e alturas iguais, que são exatamente as componentes da velocidade perpendiculares ao “puxão” e que, portanto, não mudam.

Analisemos as áreas A_3 e A_4 . Elas também são iguais pois os triângulos têm uma base comum (CP_4) e alturas iguais, pelo mesmo motivo apontado no parágrafo anterior. O mesmo vale para as áreas A_4 e A_5 , que também são iguais.

Apesar de termos ido de um puxão (atração) para um empurrão (repulsão) respectivamente em P_5 e P_6 , as áreas A_5 e A_6 são iguais. Isso se dá pelos mesmos motivos: triângulos com uma base comum e mesmas alturas. Este realmente é um exemplo que foge bastante do que ocorre com os planetas, mas ainda assim vale a Lei das Áreas.

Saltando para o caso da interação entre cargas elétricas, consideremos uma carga $Q > 0$, fixa no ponto C, enquanto outra carga $q > 0$ é lançada do ponto A, com a velocidade indicada (fig. 16). Considere que a interação elétrica entre as cargas é a única força a ser considerada.

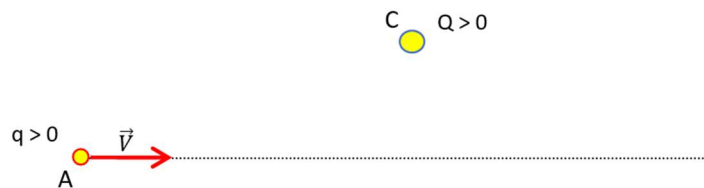


Figura 16: Carga $Q > 0$ fixa, interagindo com uma carga de prova $q > 0$.

A repulsão entre as cargas mudará a trajetória da carga q , que passa a ser curva (fig. 17).

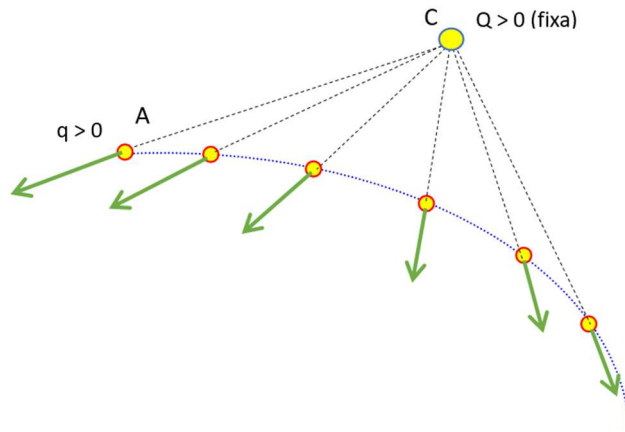


Figura 17: Em verde, os vetores que representam as forças de repulsão entre as cargas Q e q , em instantes diferentes.

As forças de repulsão são centrais quando se considera o ponto C como início dos raios vetoriais que indicam as posições da carga q ao longo de sua trajetória. Assim, mais uma vez, o momento angular se conserva e é válida a Lei das Áreas.

Consideremos agora duas massas, girando uma ao redor da outra, como um sistema duplo de estrelas. O giro se dá ao redor do centro de massa (CM) do sistema (fig. 18).

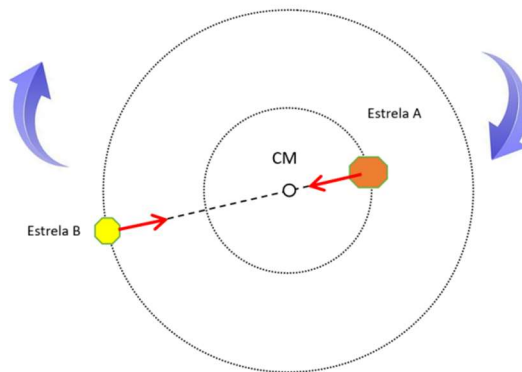


Figura 18: Sistema duplo de estrelas, que orbitam o CM do sistema.

Nesta situação, a Lei das Áreas é válida quando consideramos as medidas de posição a partir do centro de massa CM , para cada uma das estrelas. Vejamos o caso de estrelas binárias com órbitas elípticas (fig. 19).

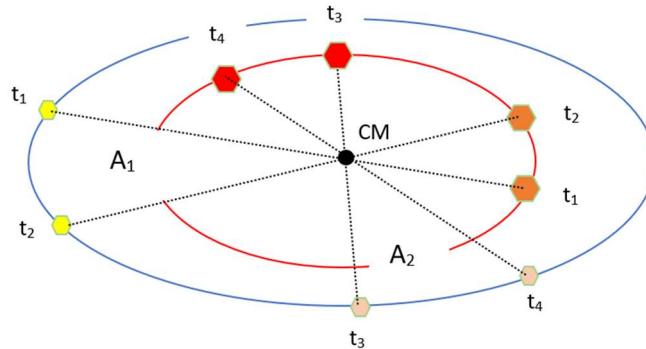


Figura 19: Estrelas binárias com órbitas elípticas, que orbitam ao redor do centro de massa CM. Esquema feito pelos autores.

No instante t_1 , as estrelas ocupam as posições indicadas na figura 19. Tempos depois, elas ocupam as posições indicadas pelo instante t_2 . A linha que une as duas passa sempre pelo CM. Consideremos que tempos depois elas ocupam as posições indicadas pelos instantes t_3 e t_4 . Se $\Delta t_{12} = \Delta t_{34}$, então $A_1 = A_2$. Isso vale para as duas estrelas. Observe que as áreas varridas são diferentes para cada estrela, no intervalo de tempo considerado. A igualdade das áreas é válida para cada astro.

Procuramos neste trabalho explorar algumas situações onde vale a Lei das Áreas, mas em muitos outros casos o professor pode encontrar sua validade. Podemos citar algumas outras situações como de uma carga elétrica lançada perpendicularmente às linhas de campo de um campo magnético uniforme ou ainda um corpo preso na ponta de uma mola, que se movimentava sobre uma mesa horizontal sem atrito com ela. Ainda que a elongação da mola se altere, e, portanto, a força dela sobre o corpo, ainda assim, a Lei das Áreas será válida. Esperamos estar abrindo caminhos para o professor do EM.

6. CONCLUSÃO

Há uma tendência do professor do Ensino Médio de limitar o estudo da Lei das Áreas ao modelo planetário. Os autores deste trabalho esperam poder contribuir para que o assunto seja tratado de modo mais amplo, mais abrangente. Ainda que haja limitações no uso de cálculos diferenciais no Ensino Médio, pode-se focar este tema do ponto de vista fenomenológico, passando à margem do cálculo superior. É fácil mostrar aos alunos que a lei das Áreas vale no MRU e dizer a eles que ela vale sempre que as forças são centrais. Os próprios estudantes podem ser incentivados a buscar outros

exemplos de movimento com força central, para os quais, evidentemente, também valem a Lei das Áreas.

Ainda que não estejamos propondo que se trabalhe no Ensino Médio com momento angular e sua conservação, isso é perfeitamente possível como se pode ver em Caniato (1990).

É nossa opinião que uma maior abertura no estudo dos fenômenos físicos contribui para o crescimento conceitual do estudante. O contrário, a restrição das leis naturais a casos muito particulares, quando poderia ser diferente, nega a possibilidade de o estudante ampliar os horizontes dos fenômenos e de ter uma formação mais abrangente.

REFERÊNCIAS

- Brody, D. E., Brody, A. R. (1999) As setes maiores descobertas científicas da história. S. Paulo, Cia das Letras.
- Caniato, R. (1990) As linguagens da Física. São Paulo, Ed. Ática.
- French, A. P. (1974) Mecânica Newtoniana – MIT Physics Course. Barcelona, Espanha, Editorial Reverté.
- Neves, M. C. D., Argüello, C. A. (1986) Astronomia de Régua e Compasso, de Kepler a Ptolomeu. Campinas: Ed. Papirus.
- Reinhardt, R. (1975) Elementos de Astronomia e Mecânica Celeste. S. Paulo, Ed. Edgard Blucher.
- Roteiro para utilização do simulador indicado - Recuperado em 1 de fevereiro de 2024, de <http://www.if.ufrgs.br/fiso2001/aulas/roteiro-simulacaonebrasca-leis-de-kepler.pdf>.
- Simulador das Leis de Kepler da Universidade de Nebraska. Recuperado em 1 de fevereiro de 2024, de <http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.html>.