

## REVIVENDO ERATÓSTENES

*Paulo Cesar R. Pereira<sup>1</sup>*

**Resumo:** Fazendo parte das comemorações do Ano Internacional da Física e tendo como principal objetivo introduzir estudantes do ensino médio ao método científico, a Fundação Planetário da Cidade do Rio de Janeiro, em parceria com diversas instituições do Brasil e da Europa, coordenou a atividade “Revivendo Eratóstenes” cujo objetivo foi a determinação da circunferência da Terra. Para isso, utilizou-se um procedimento semelhante ao empregado pelo sábio Eratóstenes há mais de 2.000 anos, com algumas adaptações. Este trabalho propõe e analisa o método que empregamos, visando a aplicação em escolas. A possibilidade de se trabalhar com locais em diferentes meridianos permite uma melhor compreensão dos conceitos mais abstratos, como coordenadas e fusos horários. A precisão dos resultados é bastante razoável, melhorando para cidades bem afastadas. Finalmente, uma das conclusões mais importantes é a percepção, por parte dos estudantes, da importância da colaboração (neste caso, internacional) para resolver problemas.

**Palavras-chave:** latitude, longitude, passagem meridiana, altura, declinação solar, Eratóstenes e circunferência da Terra.

## REVIVIENDO A ERATÓSTENES

**Resumen:** Como parte de las conmemoraciones del Año Internacional de la Física y con el objetivo principal de introducir a los estudiantes secundarios al método científico, la Fundación Planetario Rio de Janeiro, en conjunto con diversas instituciones de Brasil y de Europa, coordinó la actividad denominada “Reviviendo a Eratóstenes” cuyo objetivo consistió en la determinación de la circunferencia de la Tierra. Para esto se utilizó un procedimiento semejante al empleado por Eratóstenes hace más de 2.000 años, con algunas adaptaciones. Este trabajo expone y analiza el método empleado, con la intención de aplicarlo en las escuelas. La posibilidad de trabajar en lugares situados en diferentes meridianos permite una mejor comprensión de los conceptos más abstractos, tales como coordenadas y husos horarios. La precisión de los resultados resultó razonable, mejorando para aquellas ciudades más apartadas. Finalmente, una de las conclusiones más importantes es la de la percepción, por parte de los estudiantes, de la importancia de la colaboración (en este caso internacional) para resolver problemas.

**Palabras clave:** latitud, longitud, altura meridiana, declinación solar, Eratóstenes y circunferencia de la Tierra.

## REVIVING ERATHOSTENES

**Abstract:** As part of the commemorations of the International Year of the Physics and having as its main objective to introduce students to the scientific method, the Rio de Janeiro Planetarium Foundation, in partnership with many institutions of Brazil and Europe, coordinated the activity "Reviving Eratosthenes" whose objective was the determination of the Earth's circumference. We used the famous procedure adopted by Eratosthenes more than 2000 years ago, with some adaptations. This work considers and analyzes the method used by us, aiming the application in schools. The use of places in different meridians allows a better understanding of the abstract concepts such as geographic coordinate and time zones. We obtained reasonably precise results, which improve for pairs of distant cities. Finally, one of the most important conclusions achieved by the students involved is the importance of the cooperation (international in this case) to solve problems.

**Keywords:** latitude, longitude, solar noon and solar declination, Erathosthenes, circumference of the Earth.

---

<sup>1</sup> Fundação Planetário da Cidade do Rio de Janeiro, e-mail - pcpereira@pcrj.rj.gov.br

## 1. INTRODUÇÃO

A determinação da circunferência da Terra por Eratóstenes é considerada por muitos historiadores de ciência como um dos dez mais importantes experimentos científicos. Concebido e executado pelo sábio grego em cerca de 200 a.C., consiste basicamente na obtenção da diferença de latitude entre dois locais situados no mesmo meridiano. Uma vez conhecida a distância entre esses locais, é possível determinar a circunferência da Terra. Este método, com algumas adaptações, tem sido empregado em escolas da Europa e da América do Norte de ensinos fundamental e médio, visando o desenvolvimento de estudantes em ciências. Apresenta grande interdisciplinaridade entre a Astronomia, a Física, a Matemática, a História e a Geografia.

Em nosso trabalho diário na Fundação Planetário da Cidade do Rio de Janeiro, freqüentemente somos solicitados por alguns professores, mais comprometidos com o aprofundamento dos tópicos de Astronomia, para sugerir atividades extraclasse a serem desenvolvidas pelos estudantes. Algumas atividades que propomos são pouco desafiadoras: construção de modelos em escala de distâncias ou tamanhos do Sistema Solar, montagem de relógio solar etc. Outras atividades necessitam de visitas freqüentes ao Planetário para a observação do Sol, por exemplo. Por isso, julgamos oportuno estudar a possibilidade de desenvolver um método alternativo ao de Eratóstenes normalmente empregado, mas que levasse em conta não só a determinação da latitude, mas também a diferença em longitude, permitindo uma abrangência geográfica maior. Além disso, deveria ser didaticamente mais satisfatório e despertar nos estudantes o gosto pela investigação científica.

Este trabalho foi orientado com o objetivo de desenvolver uma seqüência de procedimentos para que o método seja facilmente empregado na escola como atividade extraclasse. Essa atividade atende plenamente as sugestões sobre currículo diversificado propostas nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), regulamentados pela Lei 9394/96 (ver portal do Mec - <<http://portal.mec.gov.br/>>). O público-alvo são estudantes entre a 7<sup>a</sup> série do ensino fundamental e a 3<sup>a</sup> série do ensino médio (segundo avaliação do professor).

A atividade normalmente é coordenada de modo que várias escolas participem. Para fazer a determinação da circunferência terrestre é necessário que cada escola envolvida escolha como parceira uma outra escola, afastada, pelo menos, 500 quilômetros.

Um ponto fundamental é que os estudantes devem ser preparados para que tenham total compreensão da atividade de modo que os objetivos sejam alcançados. Entre os vários tópicos que devem ser abordados estão: forma da Terra, eclipses, movimento aparente do Sol, fusos horários, relações trigonométricas e regra de três.

Um dos aspectos mais positivos da atividade tem sido a troca de experiências entre estudantes e professores, uma vez que o trabalho é coletivo e entre instituições, principalmente usando correio eletrônico.

### **I – BREVE HISTÓRICO DA DETERMINAÇÃO DAS DIMENSÕES DA TERRA**

As primeiras especulações a respeito da forma da Terra foram de natureza não científica.

A partir do século VI antes de Cristo, na Grécia, surgiram visões mais racionais sobre a questão da forma de nosso planeta. A primeira sugestão de esfericidade partiu da Escola Pitagórica de Crotona. Segundo vários estudiosos da época, a esfera seria a

forma mais bela. No século IV antes de Cristo, Aristóteles (384-322a.C.) apresentou argumentos mais sólidos. O mais importante deles estava relacionado com o eclipse da Lua<sup>2</sup>, um fenômeno cuja natureza (alinhamento entre o Sol, a Terra e a Lua) já era conhecida na época. Aristóteles considerou que a sombra projetada da Terra sobre a Lua, durante a fase parcial dos eclipses lunares, tinha a forma circular porque a Terra era esférica. Mas essa explicação racional não foi aceita por todos. Durante a Idade Média, mesmo pessoas "cultas" repudiavam a forma esférica da Terra (Dreyer 1953).

Os primeiros valores para a circunferência da Terra são de Aristóteles, que em sua obra *Mathematikoi* cita como sendo de aproximadamente 400.000 estádios, mas não diz como nem quem obteve este valor. Arquimedes (c.287-212a.C.), em seu tratado *De Arenae Numero* (O Contador de Areia), registra o valor de 300.000 estádios, mas igualmente não cita quem nem como esse valor foi obtido (Dreyer 1953). O primeiro a detalhar um método e a chegar a valores mais realistas foi Eratóstenes (c.270-190a.C.). Para isso ele deduziu que, sendo a Terra esférica e estando o Sol muito distante, a sombra provocada pelo Sol ao meio-dia local deveria ter comprimentos diferentes em locais diferentes, embora localizados no mesmo meridiano. De fato, Eratóstenes obteve a informação de que na cidade de Siena, no dia de solstício de verão, ao meio-dia, o Sol ficava exatamente a pino. Nesse dia, o mesmo não acontecia na cidade de Alexandria, onde a sombra se projetava de um ângulo equivalente a 1/50 da circunferência. Eratóstenes sabia que as duas cidades estavam praticamente no mesmo meridiano e que a distância entre elas (arco AB na figura seguinte) era estimada em 5.000 estádios. Eratóstenes então estabeleceu a seguinte proporção:

$$CT/5.000 = 50 \Rightarrow CT = 250.000 \text{ estádios, onde CT é a circunferência da Terra.}$$

É bastante controversa a equivalência do estádio em quilômetros. Entre os possíveis valores estão: 0,148 km, 0,158 km e 0,185 km. Adotaremos o valor de 0,185 km considerado pelos estudiosos como o mais provável. Sendo assim, Eratóstenes teria encontrado para a circunferência o valor de 46,250 km. Considerando o valor adotado hoje, 39.941 km, sua precisão foi da ordem de 16% (Newton 1980, Vogt 1983).

Posidonius (135-51a.C.) determinou a circunferência da Terra usando uma técnica diferente: comparou a altura da brilhante estrela Canopus observada em Alexandria e Rodes (Dreyer 1953, Fischer 1975). Nesta última era observada com muita dificuldade porque Canopus se encontrava praticamente no horizonte. Já em Alexandria, sua altura seria de  $7,5^\circ$ . Como as cidades de Alexandria e Rodes estavam no mesmo meridiano, a diferença em altura equivaleria à diferença em latitude. Este método era bastante impreciso porque, próximo ao horizonte, além da dificuldade em ver os astros pela elevada absorção, há ainda a refração atmosférica, que faz com que vejamos a estrela com uma altura maior do que realmente está.

---

<sup>2</sup>O eclipse é um fenômeno em que um astro deixa de ser visível, total ou parcialmente, seja pela interposição de outro astro entre ele e o observador, seja porque, não tendo luz própria, deixa de ser iluminado ao se colocar no cone de sombra de outro astro (eclipse da Lua).

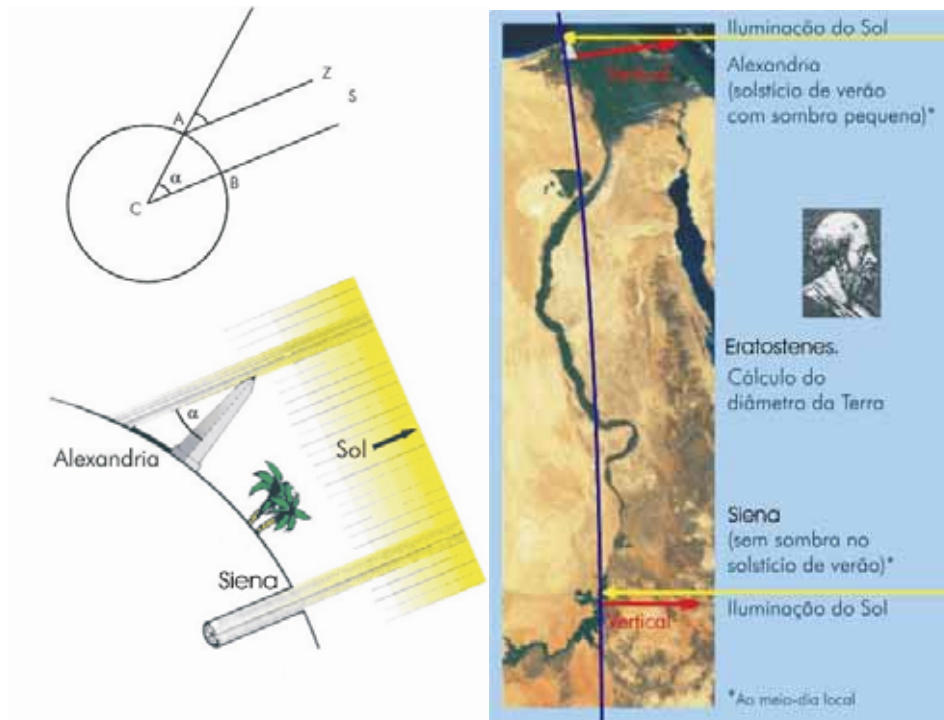


Figura 1. Método de Eratóstenes para calcular a circunferência da Terra.

Não temos acesso ao trabalho original de Posidonius, mas apenas a fontes secundárias. Segundo Cleomendes (séc. Ia.C.), Posidonius obteve para a circunferência da Terra o valor de 240.000 estádios. Já Strabo (54a.C.-24d.C.) afirma que o resultado foi de 180.000 estádios (Dreyer 1953, Fischer 1975). Embora o primeiro valor provavelmente corresponda à observação de Posidonius, o fato é que o valor divulgado por Strabo é que foi disseminado. Ptolomeu (90-170d.C), em sua famosa obra *Geographia*, adotou os valores de Posidonius (180.000 estádios). Nesse trabalho estão assinaladas, em vários mapas, as principais marcas do relevo: montanhas, rios, mares, além de inúmeras cidades da Europa, Ásia e África. Devido à grande confiabilidade que Ptolomeu tinha entre os estudiosos, os valores para o tamanho da Terra, assim como os seus mapas foram amplamente aceitos por mais de 1.200 anos. Ou seja, por séculos acreditou-se que a circunferência da Terra fosse cerca de 7.000 quilômetros menor em relação ao seu tamanho real.

Cristóvão Colombo (1451-1506) subestimou os já subestimados valores de Ptolomeu (e Posidonius), acreditando que a Ásia se encontrava a cinco ou seis mil quilômetros a oeste da Espanha. Ele usou esses dados para convencer os seus patrocinadores da viabilidade da viagem para o Oriente. Como sabemos, Colombo e sua tripulação foram salvos porque a América estava entre a Europa e a Ásia. Se tivesse usado os valores de Eratóstenes, teria que viajar 20.0000 quilômetros para oeste (Dreyer 1953). Mesmo que tivesse coragem para isso, certamente não encontraria financiadores para a expedição.

Foi somente com a circunavegação marítima iniciada por Fernão de Magalhães (1470-1521) em 1519 e concluída em 1522 por Sebastián Elcano (1476?-1526) que a humanidade teve uma prova direta da forma da Terra e de suas dimensões.

Em 820d.C., Al-Mamun (813-885), da escola de Bagdá, determinou para a circunferência da Terra o valor de 39.986 km (Berry 1961). Nessa determinação foram utilizados quadrantes gigantes. Infelizmente esse resultado extraordinário não chegou na época à Europa (e se chegasse talvez não o aceitariam).

O francês Jean Fernel (1497-1558), em 1525, encontrou o valor de 39.816 km (ver em *Wikipedia – The free Encyclopedia* <[http://en.wikipedia.org/wiki/Main\\_Page](http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page)>). A partir daí a precisão aumentou rapidamente.

## II – MÉTODO PROPOSTO

A idéia do método surgiu a partir de uma troca de correspondência com a professora Manuela do Amaral da Escola Secundária da Cidadela, em Cascais, Portugal, que encontrou em nosso site (<http://www.as88constelacoes.hpgvip.ig.com.br/>) algumas atividades de Astronomia que ela julgou úteis para motivar seus estudantes do nível médio de ciências. Naquela ocasião, surgiu a oportunidade de desenvolvermos uma atividade em conjunto entre os estudantes da Escola da Cidadela e o Planetário do Rio. Elegemos, então, o experimento de Eratóstenes para reproduzir.

Atualmente, são empregadas em escolas duas variantes do método de Eratóstenes. A primeira define uma cidade fictícia no equador. Conhecendo-se a distância entre o observador e o equador (ao longo do meridiano<sup>3</sup>), divide-se esta pela latitude local, determinada pela altura do Sol, obtendo-se uma escala quilômetros/grau e, posteriormente, o diâmetro da Terra. A observação do Sol é feita no dia do equinócio, quando a distância zenital do Sol coincide com o valor da latitude local. A segunda variante utiliza a distância entre os paralelos<sup>4</sup> dos dois locais. Para isso é utilizado um mapa com escala de distância no “eixo das latitudes”. Após obter as alturas do Sol e a diferença em latitude, emprega-se a escala do mapa para obter-se a escala quilômetros/grau. Ao analisar os métodos habitualmente empregados, percebemos que poderiam ser aperfeiçoados.

Ao desenvolver o nosso método definimos alguns requisitos:

- Ser o mais simples possível para facilitar a aplicação em escolas.
- Levar em conta a diferença em longitude para que qualquer pessoa, em qualquer lugar do planeta, pudesse participar.
- Padronizar os métodos de observação e de redução dos dados. Essa padronização é indispensável para que os resultados apresentem consistência entre si.
- Não usar mapa ou globo terrestre em nenhuma fase da atividade, porque se identificamos os locais dos grupos participantes no mapa o problema já está resolvido. Não há desafio algum a ser superado.
- Aplicar o método em qualquer época do ano, e não apenas nos equinócios.

Nossa proposta não é revolucionária. Utilizamos conhecimentos elementares, a maioria dominada pelos estudantes de nível médio. Em nossa pesquisa, contudo, não encontramos nenhuma referência que leve em consideração a diferença de longitude. A nosso ver, isso não só amplia as possibilidades de participação como é didaticamente mais abrangente. Para aqueles que desejarem aprofundar vários tópicos abordados na atividade, recomendamos a leitura de Boczek (1984).

As várias etapas da atividade estão listadas abaixo. Usaremos como exemplo os dados da atividade desenvolvida entre a Fundação Planetário da Cidade do Rio de Janeiro e a Escola Secundária de Cascais, no dia 24 de novembro de 2003.

<sup>3</sup> círculo máximo na Terra que passa pelos pólos.

<sup>4</sup> paralelo é um círculo paralelo ao equador.

## II.1. Materiais e informações necessários

Os materiais são de uso comum e de fácil obtenção: régua, relógio, calculadora, gnômon (ver a seguir em confecção do gnômon<sup>5</sup>), bola de isopor com 20cm de diâmetro, alfinetes, caneta, fita métrica flexível e nível. Será necessário também conhecer a declinação do Sol no dia, a distância entre os dois locais e o fuso horário das duas cidades.

## II.2. Preparação dos estudantes

Alguns dos conceitos aplicados na atividade estão presentes na ementa de várias disciplinas e, por isso, podem ser explorados pelos professores antes da atividade propriamente dita. Entre os tópicos que podem ser lembrados (ou apresentados) estão: Geografia (fusos horários, latitude, longitude, equador, meridianos, paralelos, rotação e revolução, orientação de dia e à noite), Matemática (relações trigonométricas, semelhanças de triângulos e a geometria), História (história das ciências, o tamanho da Terra e as grandes navegações, Renascimento científico), Física (luz e sombra, eclipses, método científico, bússola, relógio de sol, medidas e precisão).

## II.3. Confecção do gnômon

O gnômon pode ser uma haste fincada perpendicularmente ao chão ou fixada em uma base de madeira. Pode-se usar um nível ou um esquadro para avaliar e ajustar a perpendicularidade do chão ou da base, o que é feito em dois pontos definindo segmentos de reta ortogonais entre si. A ponta na haste não deve ser “apontada”, como um lápis, pois isso pode gerar dificuldades na leitura quando o Sol estiver muito alto, o que é comum em regiões intertropicais. Sugerimos que a haste tenha 50 cm de altura. Para medir o comprimento da sombra pode-se recorrer a uma régua que foi cortada adequadamente para que não haja espaço entre o “zero” e a extremidade da régua.

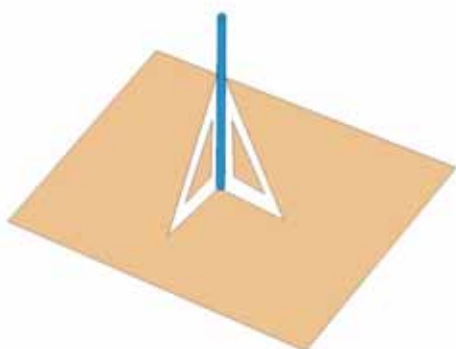


Figura 2a. Verificando a verticalidade da hast

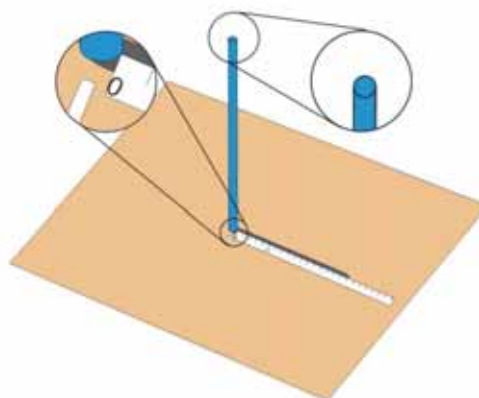


Figura 2b. Detalhe da ponta do gnômon e da medição

## II.4. Orientação

Para que possamos realizar a atividade, precisaremos conhecer bem a orientação geográfica do local – a direção norte-sul. Isso deve ser feito vários dias antes da

<sup>5</sup> uma haste que ao ter sua sombra projetada indica a altura do Sol.

atividade, e aprimorado, se possível. Para isso, usaremos o conhecido método de Vitruvius<sup>6</sup>.

Será necessário um local ao ar livre onde incida a luz solar durante boa parte do dia. Inicialmente faz-se uma circunferência tendo como centro a base da haste e com o raio igual à metade da altura da mesma. O movimento diário do Sol fará com que a sombra da ponta da haste incida sobre o círculo em dois momentos (um de manhã e outro à tarde); esses pontos na circunferência devem ser marcados. Eles definem a linha leste-oeste. A linha horizontal perpendicular a esta será a linha norte-sul (meridiana). O meio-dia solar corresponde ao instante em que a sombra incidir exatamente sobre a meridiana (neste instante, dizemos que ocorre a passagem meridiana<sup>7</sup>).

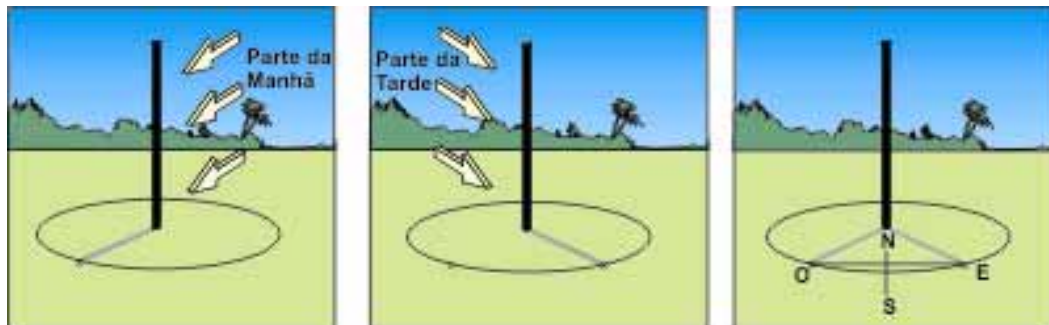


Figura 3. Determinação da linha norte-sul pelo método de Vitruvius.

## II.5. Determinação da latitude e instante da passagem meridiana (culminação)

No dia marcado para a observação, acompanha-se a sombra do gnômon. O objetivo é determinar a altura<sup>8</sup> do Sol quando a sombra atingir a meridiana, e o momento em que isso ocorre.

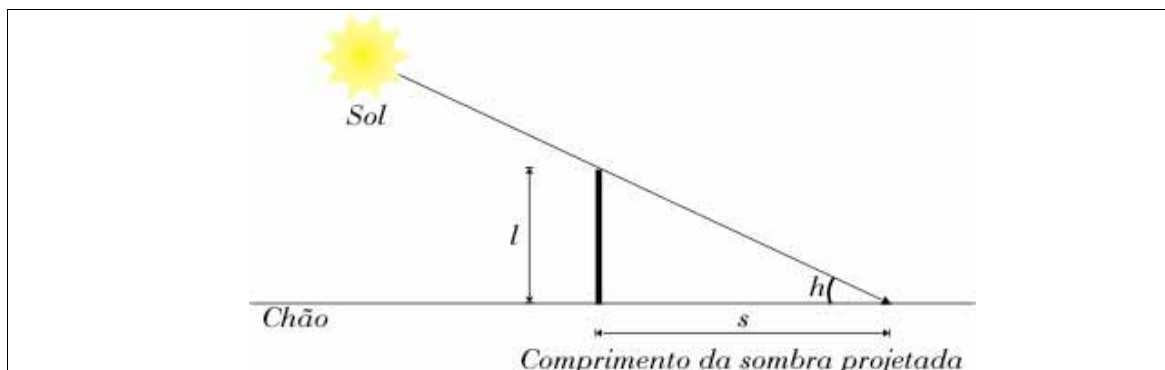


Figura4. Geometria do gnômon.

A altura do Sol pode ser conhecida através dos comprimentos da sombra (s) e da haste (l):

$$h = \arctan (l / s)$$

Onde:

l = altura da haste

s = comprimento da sombra.

<sup>6</sup> Marcus Vitruvius Pollio foi um engenheiro e arquiteto romano que viveu no século I a.C. e deixou como legado a sua obra em 10 volumes, aos quais deu o nome de De Architectura (aprox. 40 a.C.)

<sup>7</sup> momento em que um determinado astro atinge sua altura máxima.

<sup>8</sup> distância em graus a partir do horizonte até o astro, medida sobre a vertical do astro.

Para calcularmos a latitude<sup>9</sup> utiliza-se uma das equações:

$$\varphi = \delta - (90^\circ - h) \quad \text{se a sombra se projeta na direção Sul}$$

ou

$$\varphi = \delta + (90^\circ - h) \quad \text{se a sombra se projeta na direção Norte}$$

Onde:

$\varphi$  = latitude do lugar

$h$  = altura em graus do Sol na passagem meridiana

$\delta$  = declinação<sup>10</sup> do Sol para o dia

A declinação do Sol varia ao longo do ano. É zero nos equinócios, +23°27' no solstício de inverno (hemisfério sul) e -23°27' no solstício de verão (hemisfério sul). Os valores diários da declinação do Sol podem ser encontrados no Anuário ou no site do Observatório Nacional ([www.on.br](http://www.on.br)). A tabela abaixo indica os resultados obtidos nos dois locais.

Tabela 1. Resultados da primeira atividade realizada em 24 de novembro de 2003.

	Passagem meridiana (TU)	Altura da haste (l)	Comprimento da sombra (s)	Altura do Sol (h)	Latitude medida
<b>Cascais</b>	12h22min	46,7cm	77cm	31,24°	90° - (31,24° + 20,42°) = + 38,3°
<b>Rio de Janeiro</b>	14h38min10s	25,5cm	1,3cm	87,1°	90° - (87,1° + 20,42°) = -23,3°

## II.6. Determinação da longitude e instante da culminação

Na verdade, não determinamos as longitudes das duas cidades, mas sim a diferença entre elas. No momento em que a sombra da haste atingir a direção N-S, anota-se a hora local e, a seguir, deve-se convertê-la para a hora universal<sup>11</sup>, ou seja, a que toma como referência o meridiano de Greenwich (soma-se a hora local ao fuso horário<sup>12</sup> correspondente). A diferença entre os instantes das culminações será igual à diferença em longitude<sup>13</sup>. Será necessário converter a diferença em longitude para graus. Como são necessárias 24 horas para a Terra dar uma volta com relação ao Sol (360°) temos que em uma hora ela gira 15 graus. Desse modo basta multiplicarmos por 15°/h a diferença em longitude expressa em horas. Tomando como exemplo ainda a atividade Rio-Cascais, a diferença de tempo das passagens foi de 2,27h, o que corresponde a 34,05° (2,27×15).

## II.7. Determinação das posições das cidades numa bola de isopor

Para essa etapa usaremos uma bola com uns 20 centímetros de diâmetro, onde serão marcados os pólos<sup>14</sup> e a linha do equador (nós recomendamos que seja utilizada uma

<sup>9</sup> distância angular a partir do equador (círculo máximo na superfície da Terra que corta o eixo de rotação perpendicularmente) até o lugar em que a latitude é referida; é contada sobre o meridiano do astro.

<sup>10</sup> coordenada medida a partir do equador celeste (projeção do equador terrestre na esfera celeste) até o astro contada ao longo do círculo horário do astro.

<sup>11</sup> instante, na escala de tempo, definido como tempo médio local do meridiano de Greenwich.

<sup>12</sup> cada uma das 24 partes da superfície terrestre limitada por meridianos equidistantes entre si de 15°, dentro da qual a hora, por convenção, é a mesma. Por razões práticas, muitas vezes a delimitação dos fusos não é exatamente 15°, podendo, por exemplo, ser fronteiras territoriais. Sendo mais preciso, na linha de mudança de data, temos meio fuso para oeste e meio para leste (7,5° cada) ambos na mesma hora, embora em dias distintos.

<sup>13</sup> distância angular contada no equador a partir do meridiano de Greenwich até o meridiano do lugar.

<sup>14</sup> pólo é o ponto de encontro do eixo de rotação de um astro com a sua superfície.



bola de isopor porque, como é constituída por duas metades que se encaixam, a junção já identifica o “equador”). É necessário medir também a circunferência da bola, o que é feito com uma fita métrica flexível, para obtermos uma escala que relacione graus com centímetros. Por exemplo, a bola que usamos tinha uma circunferência de 79,5 cm e, com isso, a escala será  $360^\circ/79,5\text{cm} = 4,53^\circ/\text{cm}$ . Com a latitude da cidade obtida pela observação do Sol e a escala recém-calculada, marca-se na bola o ponto (para isso pode-se usar um alfinete) correspondente à primeira cidade (Cascais). A partir desse ponto, traça-se o meridiano dessa cidade até o equador. Deve-se ter em mente que os meridianos são perpendiculares ao equador e convergem para os pólos.

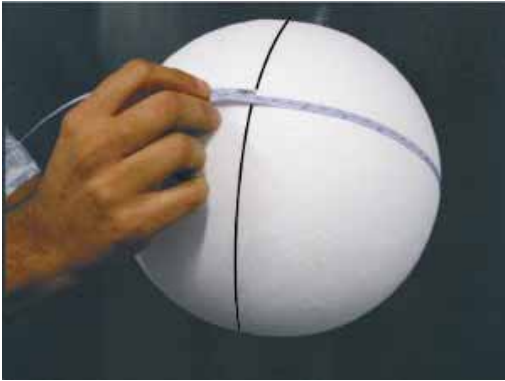


Figura 5. Medindo a circunferência da bola de isopor.



Figura 6. Marcando a primeira cidade (Cascais).

No equador da bola marca-se o ângulo correspondente à diferença entre os instantes das passagens meridianas nas duas cidades para localizar o meridiano da segunda cidade (Rio de Janeiro). Uma vez conhecido o meridiano do Rio, marque com outro alfinete o local correspondente à latitude do Rio.



Figura 7. Ao longo do “equador” é assinalada a diferença em longitude.



Figura 8. Marcando a segunda cidade (Rio de Janeiro).

## II.8. Cálculo da circunferência da Terra

Para isso mede-se com uma fita métrica flexível a separação entre as duas cidades na bola de isopor, de modo que a fita circunde a bola num círculo máximo<sup>15</sup>. A circunferência da Terra é obtida por uma simples regra de três.

$$CG/DCR=DB/DEP$$

Onde:

CG = circunferência da Terra

DCR=distância entre as duas cidades. Obtida, por exemplo, no site:

<http://www.wcrl.ars.usda.gov/cec/java/lat-long.htm>

DB = circunferência da bola de isopor

DEP = distância na superfície da bola entre os pontos (“cidades”)

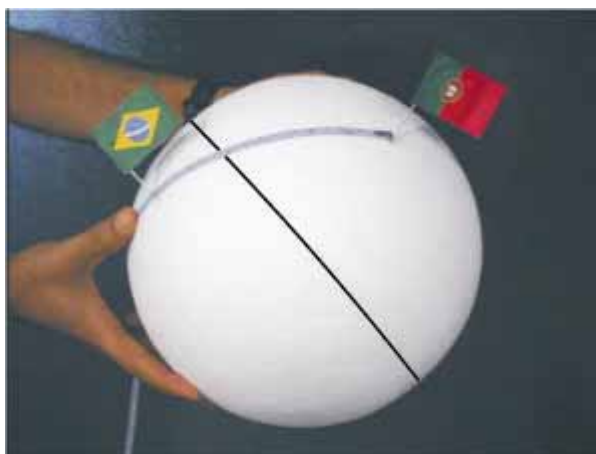


Figura 9. Medindo a distância entre as duas cidades (sobre um círculo máximo) no modelo.

A Tabela 2 resume os dados obtidos na atividade Rio-Cascais realizada em 24/11/2003.

---

<sup>15</sup> círculo sobre a superfície de uma esfera, cujo plano contém o centro dessa esfera.

Tabela 2. Resultados finais da atividade realizada em 24 de novembro de 2003.

Circunferência da bola	79,5 cm
Escala da bola	4,53°/cm
Latitude observada em Cascais	+38,34° (+8,47 cm)
Latitude observada no Rio	-23,3° (-5,14 cm)
Diferença de longitude	2,27h x 15°/h = 34,05°
Distância entre as duas cidades na bola	15,5 cm
Distância entre Cascais e Rio	7.705 km
Circunferência da Terra obtido pela equipe Rio	39.400 km
Valor de referência para a Circunferência polar da Terra <sup>16</sup>	39.941 km <sup>17</sup>

### III – A ATIVIDADE DE 2004

Após os estimulantes resultados da atividade com a Escola Secundária da Cidadela, a atividade voltou a ser testada em quatro oportunidades em 2004. Abaixo está a relação dos pares de cidades com os respectivos resultados para a circunferência da Terra (o valor de referência para a circunferência polar é de 39.941km):

Rio de Janeiro<sup>2</sup> / Valência (Espanha)<sup>1</sup> (08/07/2004) = 39.543 km

São Pedro (São Paulo)<sup>2</sup> / João Pessoa<sup>1</sup> (10/08/2004) = 40.770 km

Rio de Janeiro<sup>2</sup> / Veneza (Itália)<sup>1</sup> (16/10/2004) = 38.439 km

Rio de Janeiro<sup>1,2</sup> / Florianópolis<sup>3</sup> (12/11/2004) = 45.957 km

Responsáveis

1- Fernando Vieira (Planetário-Rio)

2- Paulo Cesar R. Pereira (Planetário-Rio)

3- Carlos Alberto Vieira (Planetário-UFSC)

OBS. A rigor, só a determinação com as cidades de São Pedro (SP) e João Pessoa foram atividade, pois naquela ocasião houve a participação de professores do curso de capacitação promovido pela SAB (Sociedade Brasileira de Astronomia). Nas outras três determinações houve apenas a participação dos responsáveis.

### IV – A ATIVIDADE DE MARÇO DE 2005

Em janeiro de 2005, começamos os preparativos para uma grande atividade na qual avaliaríamos o método, não só no que diz respeito à precisão da determinação, mas também à sua aplicação em várias escolas ao mesmo tempo.

Participaram cinco Planetários do Brasil e nove escolas da Europa (estudantes entre 10 e 16 anos). Para minimizar a possibilidade de mau tempo, definimos o período de observação em uma semana (14 a 18 de março). Nessa atividade, a maioria dos responsáveis se baseou apenas nas informações de um *website*. Além de um site em português (<http://www.rio.rj.gov.br/planetario/eratostenes/era1.html>) e outro em inglês (<http://www.rio.rj.gov.br/planetario/eratostenes/english/era1.html>), foi utilizado um “servidor” COPHYLAB (<http://cophylab.no-ip.org>), onde os integrantes (professores e estudantes) puderam participar de *chats*: *earth chat* e *student lounge*. Este último,

<sup>16</sup> Acreditamos que a escolha da circunferência polar seja didaticamente mais adequada uma vez que os pólos são uma referência imediata para a maioria dos estudantes.

<sup>17</sup> ver em Wikipedia – The free Encyclopedia <[http://en.wikipedia.org/wiki/Main\\_Page](http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page)>

exclusivamente entre estudantes. No COPHYLAB havia espaços reservados para que cada participante publicasse seus resultados e fotos da atividade (Figuras 10 até 13).



Figura 10. Estudantes da Haggerton School.

#### IV.1. Os resultados obtidos

Na tabela seguinte apresentamos os valores medidos pelos vários participantes. Em cada data, o primeiro valor indica a latitude calculada e o segundo o instante da culminação, em Tempo Universal.

Tabela 3. Culminação e altura solar para a atividade de março de 2005.

Cidade/Responsável	14 de março	15 de março	16 de março	17 de março	18 de março
Belém Ozimar C. da Silva Michel Sauma				-00,95° 15h20min	
Campinas Romildo Póvoa				-22,77° 15h17min	
Cascais-Portugal Manuela do Amaral	38,68° 12h48min	38,10° 12h47min	38,61° 12h44min	38,69° 12h42min	38,66° 12h38min
Darmstad-Alemanha Thomas Schmidt	49,5° 11h34min	49,4° 11h34min			
Falkenberg-Suécia Linda Möller	56,48° 11h32min	56,55° 11h21min			
Florianópolis Carlos Vieira		-27,86° 15h21min			
Haskovo-Bulgária Ioanna Kokotanekova			41,62° 10h23min		
Londres-Inglaterra Sheila Curtis			51,6° 12h00min		
Marselha-França Marie-Christine				43,87° 11h48min	
Rio de Janeiro Fernando Vieira/Paulo Pereira	-22,1° 15h02min	-22,6° 15h02min	-22,6° 15h04min	-22,8° 15h02min	-22,8° 15h02min
Sulingen (grupo1)-Alemanha Ulrich Ernest	52,1° 11h26min				
Sulingen (grupo2) Ulrich Ernest	52,6° 11h38min				
Sulingen (grupo3) Ulrich Ernest	53,1° 11h35min				
Varna-Bulgária Veselka Radeva	42,6894° 10h14min	42,3572° 10h15min	42,3840° 10h16min	42,1983° 10h17min	42,1159° 10h17min

Os participantes de Munique (Alemanha), Goiânia (Brasil) e Recife (Brasil) não puderam observar devido às condições meteorológicas no período.



Figura 11. Medição da altura do Sol no instante da culminação no Rio de Janeiro.



Figura 12. Estudantes do Astronomical Observatory em Varna, Bulgária.



Figura 13. Estudantes do Gymnasium Sulingen, Alemanha.

#### IV.2. As determinações da circunferência da Terra

A tabela assinala os pares de cidades (bem como datas das medidas), a separação entre elas, o resultado da determinação e o erro percentual. Alguns pares de cidades permitiam determinações em mais de um dia; contudo, optamos por fazer apenas uma. Os números entre parênteses indicam o dia da observação. Para este cálculo foi usada a mesma bola de isopor das atividades anteriores: circunferência de 79,5cm e 4,53°/cm. Os cálculos foram feitos por Fernando Vieira e Paulo Pereira.

Tabela 4. Determinações da circunferência da Terra para a atividade de março de 2005. Os resultados estão em ordem de separação entre as cidades (da menor para a maior). A cor vermelha é usada para pares de cidades cujas distâncias sejam inferiores a 800 km. A cor azul, para distâncias entre 800 e 5.000 km. A cor verde para distâncias entre 5.000 e 10.000 km. Finalmente, a cor amarela para distâncias maiores de 10.000 km. Na primeira coluna, entre parênteses, é indicada a data de observação.

Pares de cidades	Separação (km)	Circunferência (km)	Erro percentual
Haskovo-Varna(16)	240	27.257	31,76%
Sulingen-Darmstadt(14)	311	30.906	22,62%
Rio/Campinas(17)	392	36.387	8,90%
Rio/Florianópolis(15)	746	35.035	12,28%
Falkenberg-Darmstadt(14)	819	40.694	1,89%
Cascais-Marselha(17)	1.341	44.983	12,62%
Cascais-Londres(16)	1.594	37.821	5,31%
Varna-Darmstadt(15)	1.641	41.416	3,69%
Marselha-Varna(17)	1.817	40.125	0,46%
Falkenberg-Varna(14)	1.869	37.146	7,00%
Cascais-Darmstadt(15)	1.892	39.583	0,90%
Cascais-Sulingen(14)	2.088	39.523	1,05%
Haskovo-Londres(16)	2.213	41.396	3,64%
Londres-Varna(16)	2.287	43.811	9,69%
Campinas-Belém(17)	2.394	38.065	4,70%
Rio/Belém(17)	2.449	38.507	3,59%
Cascais-Falkenberg (14)	2.576	39.383	1,40%
Cascais-Haskovo(16)	2.964	38.692	3,13%
Cascais-Varna(14)	3.146	41.685	4,37%
Cascais-Belém(17)	5.984	39.977	0,09%
Marselha-Belém(17)	7.301	43.439	8,76%
Rio/Cascais(16)	7.698	39.256	1,72%
Cascais-Campinas(17)	7.893	39.465	1,19%
Cascais-Florianópolis(15)	8.412	40.531	1,48%
Rio/Marselha(17)	8.874	37.846	5,25%
Varna-Belém(17)	9.017	40.963	2,56%
Rio/Londres(16)	9.272	39.331	1,53%
Rio/Darmstadt(15)	9.564	40.569	1,57%
Rio/Sulingen(14)	9.784	40.160	0,55%
Rio/Haskovo(16)	10.079	39.364	1,44%
Rio/Falkenberg(15)	10.272	40.321	0,95%
Florianópolis-Darmstadt(15)	10.287	39.991	0,13%
Rio/Varna(15)	10.318	40.099	0,40%
Falkenberg-Florianópolis(15)	10.982	40.234	0,73%
Florianópolis-Varna(15)	11.063	39.089	2,13%

### IV.3. Análise estatística da amostra

A Tabela a seguir apresenta as principais medidas de posição e de dispersões para a amostra. A Figura 14 apresenta o histograma da amostra.

Tabela 5. Estatística da amostra obtida em março de 2005.

Média das determinações	39.230 km
Determinação maior	44.983 km
Determinação menor	27.257 km
Desvio padrão	3.211,9 km
Mediana	39.583 km
Valor de referência (circunferência polar)	39.941 km
Erro (mediana - valor de referência)	358 km

**Histograma da amostra**

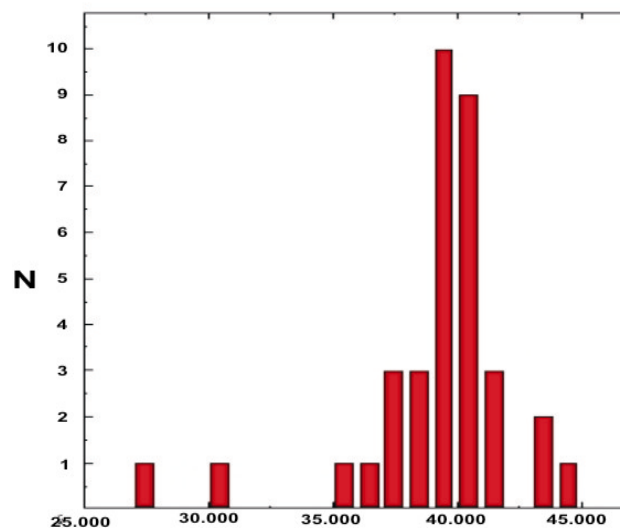


Figura 14. Histograma para a amostra. Eixo horizontal denota distâncias entre pares de cidades.

O histograma (Figura 14) mostra claramente duas determinações (à esquerda no gráfico) que não seguem a tendência do restante da amostra. Essas determinações correspondem aos pares muito próximos Haskovo-Varna e Sulingen-Darmstadt. Desconsiderando-se estes últimos, a distribuição assemelha-se a uma gaussiana.

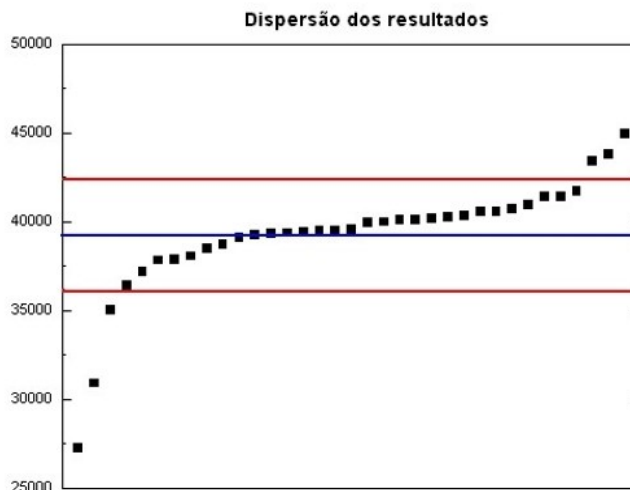


Figura 15. Dispersão dos resultados.

No gráfico da Figura 15, as determinações da circunferência estão ordenadas da menor para a maior, de baixo para cima. A linha horizontal azul indica o valor médio (39.230 km). As linhas em vermelho indicam os limites superior e inferior do desvio padrão (3.212 km). Os seis pontos externos às barras de desvio padrão são: Haskovo-Varna, Sulingen-Darmstadt, Rio-Florianópolis, Marselha-Belém, Londres-Varna e Cascais-Marselha (da menor determinação para a maior).

A análise das determinações indicou que a principal fonte de erro dos pares Haskovo-Varna, Sulingen-Darmstadt, Rio-Florianópolis e Cascais-Marselha foi a pequena separação entre as cidades. Já nos pares Marselha-Belém e Londres-Varna, a principal causa da pequena precisão foi que, embora os erros individuais não fossem muito grandes, uma das cidades estimou para mais e outra para menos; nesse caso os erros se somaram. Em outros casos, mesmo com erros individuais maiores, as duas cidades estimaram igualmente para mais ou para menos; nesse caso o erro total foi menor.

#### IV.3.1 Erro percentual médio segundo a distância

Após as determinações de todos os pares de cidades possíveis, calculou-se os erros percentuais, dividiu-se os pares por famílias de distâncias, montou-se a tabela a seguir e finalmente plotou-se o gráfico “erro percentual médio × separação” (Figura 16).

Tabela 6. Erro percentual segundo a distância.

Separação (km)	Erro percentual
<800	18,89%
>800 <5000	4,23%
>5000 <10000	2,47%
>10000	0,96%

O resultado mostra claramente que quanto menor a separação entre as cidades maior o erro. Distâncias inferiores a 800 km apresentam resultados pouco estimulantes. Essa



constatação é extremamente importante porque nos orientará na escolha dos pares de cidades nas próximas atividades

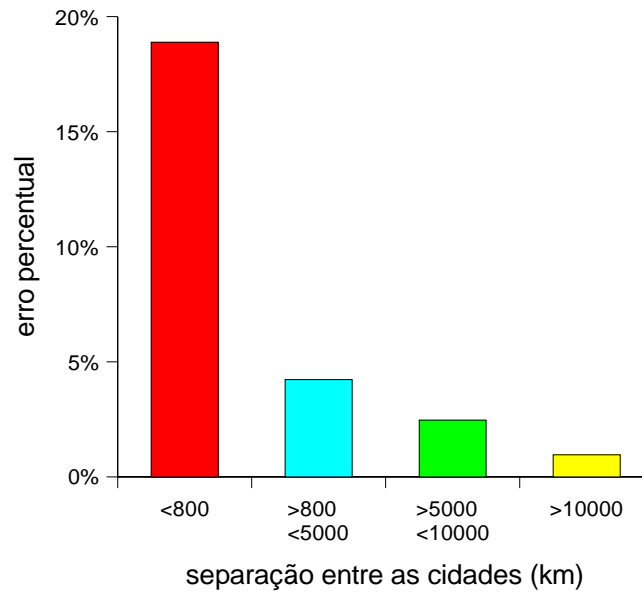


Figura 16. Erro percentual médio em função da separação das cidades.

### IV.3.2 Distribuição do erro

Foi feita uma análise dos erros da determinação da latitude e do instante da passagem meridiana do Sol de 25 determinações. Para isso foram utilizadas as coordenadas tabeladas das cidades e o *software* The Sky da empresa Bisque.

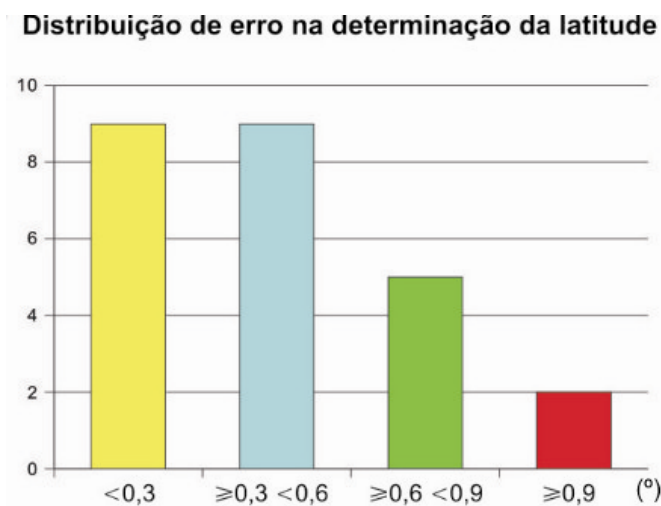


Figura 17a. Erro percentual na determinação da latitude. Eixo vertical informa o erro médio. Eixo horizontal informa a discrepância entre o valor determinado pelos grupos para a latitude e o tabelado.

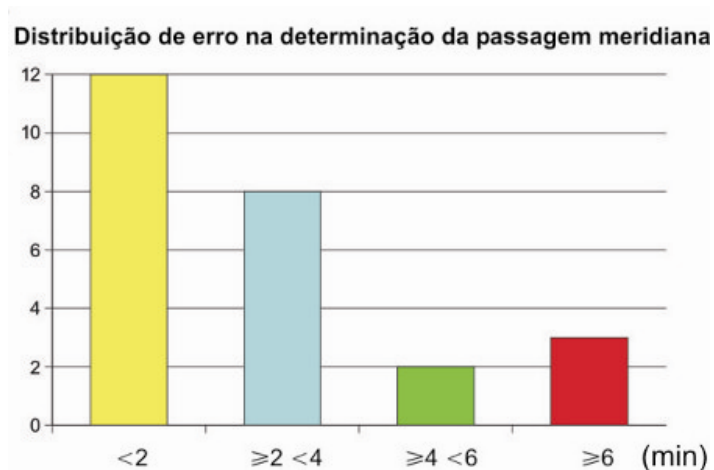


Figura 17b. Erro na determinação da passagem meridiana (eixo vertical) e defasagem entre a hora tabelada da passagem meridiana e a obtida experimentalmente pelos grupos.

Os erros na determinação da latitude foram devidos, principalmente, a não perpendicularidade entre a haste e a base e/ou ao não paralelismo entre a base e o chão. Uma má determinação da passagem meridiana não produz necessariamente uma má determinação na latitude, pois poucos momentos antes ou depois do trânsito a altura do Sol é praticamente a mesma. Consideramos a precisão boa principalmente se levarmos em conta que a maioria dos participantes nunca havia participado de uma atividade como esta. Com um pouco mais de prática, o erro pode facilmente ficar abaixo de  $0,3^\circ$  em latitude e um minuto na passagem meridiana.

## CONCLUSÃO

Após a realização da atividade em várias ocasiões e em locais bastante diversos, pudemos diagnosticar que, embora os resultados sejam bons, eles poderiam ser melhorados. Como toda experiência científica, os resultados dependem do método, mas também do cuidado nos preparativos e da atenção nas medições. Os itens que necessitam de maior atenção dos participantes são, em ordem de importância: determinação da meridiana (método de Vitruvius), verticalidade do gnômon, medição da altura da haste e do comprimento da sombra e medições na bola-modelo.

Os resultados das determinações mostraram que o método é muito eficiente; a maioria apresentou erro abaixo de 5%. Considerar cidades em diferentes meridianos, sem dúvida, ampliou as possibilidades de participação além de facilitar, por parte dos alunos, a compreensão de vários conceitos abstratos, como coordenadas geográficas e fusos horários.

Como vimos, a precisão das determinações diminuiu muito com a distância. Se a separação das cidades do par for inferior a 800 quilômetros, os resultados serão pouco impressionantes. Esse quadro se modifica rapidamente com distâncias maiores. Para grandes distâncias (acima de 5.000 km), a precisão da medição da altura do Sol e a da passagem meridiana passam a ter mais peso. A análise dos resultados em latitude revelou que a principal fonte de erro está na verticalidade da haste e/ou no paralelismo da base do gnômon com o chão. Já a análise dos erros da passagem meridiana mostrou que a orientação pelo método de Vitruvius pode ser aperfeiçoada.

Insistimos na vantagem de se usar como modelo uma bola de isopor com alfinetes para marcar as cidades, principalmente devido à identificação do equador, à praticidade e à precisão obtida. Cabe ressaltar que os estudantes da Escola Secundária da Cidadela

obtiveram resultados muito bons empregando como modelo uma bola de vôlei, na qual as cidades foram assinaladas com uma caneta.

Nem todos os professores/mentores da atividade de março de 2005 deram retorno da participação dos estudantes. A quase totalidade dos participantes se contentou em determinar a latitude e a assinalar o instante da passagem meridiana com os estudantes participando ativamente. Mas poucos relataram ter apresentado aos estudantes a fase do modelo. Isso foi para nós uma grande frustração. Não sabemos se essa etapa foi feita. Os estudantes de Varna, de ensino médio, substituíram o modelo por equações; muito interessante, mas como provavelmente os estudantes não dominam trigonometria esférica, sua aplicação será semelhante a uma caixa preta na qual ao serem introduzidos valores a fórmula devolve o resultado, sem a perfeita compreensão do que está acontecendo.

Um aspecto importante da atividade é a eficácia em promover o espírito de colaboração. Ficou claro, também, que o experimento apresenta um aspecto inovador. Ao utilizar um modelo de Terra (bola de isopor) em sua fase culminante, o método mostrou-se extremamente revelador para alguns estudantes. A não-obrigatoriedade de se trabalhar com cidades num mesmo meridiano é um facilitador a mais. Pela Matemática e a Física envolvidas, o experimento é mais adequado ao público do ensino médio. Por outro lado, as conexões com as disciplinas Geografia e História sugerem que adaptações para um perfil ligeiramente mais jovem é possível, como o verificado com as escolas de Portugal e da Inglaterra.

Nos pareceu pouco produtivo o *chat* entre estudantes. Em geral, não são discutidos assuntos pertinentes à atividade. Já o *chat* com professores cumpriu plenamente seus objetivos com grande participação e troca de experiências.

Um dos objetivos principais da atividade “Revivendo Eratóstenes” era demonstrar a viabilidade de se empregar um experimento simples (baixo custo) na introdução ao método científico, em que os professores e estudantes participassem ativamente e que pudessem chegar a um resultado estimulante. Acreditamos que esse objetivo tenha sido plenamente atingido.

## REFERÊNCIAS

- BOCZKO, R. (1984). *Conceitos de Astronomia*. São Paulo: E. Blucher.
- BERRY, A. (1961). *Greek Astronomy*. In: A short history of astronomy from earliest times through the nineteenth century. New York: Dover.
- DREYER, J. L. E. (1953). *The dimensions of the world*. In: A History of Astronomy from Thales to Kepler. New York: Dover Publications, Inc.
- FISCHER, I. (1975). Another look at Eratosthenes' and Posidonius' determinations of the earth's circumference. *Quarterly Journal of Royal Astronomical Society, London*: v. 16, p. 152-167.
- NEWTON, R. (1980). The source of Eratosthenes' measurement of the earth. *Quarterly Journal of Royal Astronomical Society, London*: v. 21, p. 370-387.
- VOGT, G. L. (1983). Eratosthenes: the librarian who measured the earth. *Odyssey, Milwaukee, WI*, v. 5, n. 9, p. 17-21.
- Revivendo Eratóstenes – uma atividade multidisciplinar. Disponível em <<http://www.rio.rj.gov.br/planetario/eratostenes/era1.html>>. Acesso em: 2005.
- Remembering Eratosthenes – a multidisciplinary activity. Disponível em <<http://www.rio.rj.gov.br/planetario/eratostenes/english/era1.html>>. Acesso em: 2005